

MIRCEA RADEȘ

**REZISTENȚA
,
MATERIALELOR
II**

Editura Printech

Prefață

Volumul conține partea a doua a cursului de Rezistența materialelor care se predă studenților anului IIA al facultății de Inginerie Mecanică, la Universitatea Politehnică București. În ediția de față, s-au introdus capitole noi și a fost sporit numărul aplicațiilor. Partea teoretică depășește materia predată efectiv la curs datorită reducerii recente a numărului de ore în planul de învățământ.

Tradițional, în prima parte a cursului se studiază bare și sisteme de bare. Barele sunt solicitate la întindere (compresiune), forfecare, încovoiere și răsucire, fie separat, fie în diferite combinații. În primul volum s-au definit eforturile secționale în bare, tensiunile și deformațiile specifice, deformațiile și deplasările punctelor corpurilor elastice. S-a calculat distribuția tensiunilor normale și tangențiale în secțiunea transversală, și s-au determinat punctele în care apar tensiunile maxime și valorile acestora care se compară separat, sau combinate într-o tensiune normală echivalentă, cu rezistențele admisibile.

În partea a doua a cursului se prezintă metodele energetice pentru calculul deplasărilor și al sistemelor static nedeterminate prin metoda eforturilor, flambajul barelor drepte, solicitările dinamice ale barelor și calculul la solicitări în domeniul elasto-plastic. Studiul general al barelor cu pereți subțiri face obiectul unor cursuri diferite. Se studiază stările de tensiuni în tuburi axial-simetrice cu pereți groși, discuri de grosime constantă în mișcare de rotație și plăci plane subțiri. O atenție aparte se acordă oboselii și fluajului metalelor și aliajelor metalice, considerate cauze principale ale pierderii integrității structurale.

Modificarea în timp a structurii cursului a fost determinată de utilizarea calculatoarelor, dezvoltarea mecanicii ruperii, a calculului la oboseală și la fluaj. Ca urmare, s-a introdus o descriere mai detaliată a caracteristicilor mecanice ale metalelor la solicitări ciclice, calculul la oboseală la durată de viață limitată bazat pe metoda "deformație specifică - durabilitate" și cel bazat pe mecanica ruperii, precum și o descriere sumară a mecanismelor și încercărilor la fluaj.

Cursul a fost analizat și aprobat de o comisie a Consiliului profesoral al facultății de Inginerie Mecanică în anul 2003.

Cuprins

| | |
|--|-----------|
| 12. Metode energetice | 1 |
| 12.1 Energia potențială de deformare | 1 |
| 12.2 Teorema reciprocității lucrului mecanic | 2 |
| 12.3 Teorema reciprocității deplasărilor | 4 |
| 12.4 Principiul lucrului mecanic virtual | 5 |
| 12.5 Principiul minimului energiei potențiale totale | 8 |
| 12.6 Metoda Rayleigh-Ritz | 10 |
| 12.7 Prima teoremă a lui Castigliano | 13 |
| 12.8 Teorema Crotti-Engesser | 14 |
| 12.9 A doua teoremă a lui Castigliano | 15 |
| 12.10 Metoda Mohr-Maxwell | 20 |
| 12.10.1 Regula lui Vereșceaghin | 23 |
| 12.10.2 Formula lui Simpson | 29 |
| 12.10.3 Deformații în sisteme de bare articulate | 32 |
| 12.11 Sisteme static nedeterminate | 35 |
| 12.11.1 Metoda eforturilor | 35 |
| 12.11.2 Teorema lui Menabrea | 36 |
| 12.11.3 Ecuațiile canonice ale metodei eforturilor | 38 |
| 12.11.4 Sisteme static nedeterminate sollicitate de forțe axiale | 55 |
| 13. Flambajul barelor drepte | 63 |
| 13.1 Instabilitatea elastică | 63 |
| 13.2 Calculul sarcinii critice prin metoda energetică | 66 |
| 13.3 Calculul sarcinii critice prin metoda diferențială | 68 |
| 13.3.1 Metoda lui Euler | 68 |
| 13.3.2 Ecuația de ordinul patru | 71 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 13.4 | Diagrama tensiunii critice de flambaj | 74 |
| 13.5 | Calculul la flambaj | 76 |
| 13.6 | Lungimea critică de flambaj | 82 |
| 13.7 | Compresiunea excentrică a barelor zvelte | 83 |
| 13.8 | Încovoierea barelor comprimate axial | 86 |
| 14. | Cilindri cu pereți groși și discuri în rotație | 89 |
| 14.1 | Tuburi cu presiune interioară și exterioară | 89 |
| 14.1.1 | Tub cu presiune interioară | 93 |
| 14.1.2 | Tub cu presiune exterioară | 94 |
| 14.2 | Cilindri fretați | 95 |
| 14.3 | Tensiuni termice în cilindri cu pereți groși | 102 |
| 14.3.1 | Distribuția temperaturii | 102 |
| 14.3.2 | Tensiuni termice în cilindri circulari lungi | 103 |
| 14.4 | Discuri de grosime constantă, în rotație | 106 |
| 14.4.1 | Tensiuni în discuri subțiri, în rotație | 107 |
| 14.4.2 | Disc fretat pe arbore | 111 |
| 14.5 | Tensiuni termice în discuri subțiri | 114 |
| 15. | Încovoierea plăcilor subțiri | 117 |
| 15.1 | Ipotezele teoriei încovoierii plăcilor subțiri | 117 |
| 15.2 | Încovoierea pură | 118 |
| 15.3 | Încovoierea cilindrică | 123 |
| 15.4 | Încovoierea axial-simetrică a plăcilor circulare | 124 |
| 15.4.1 | Relații între momente și înclinarea normalei | 124 |
| 15.4.2 | Ecuatiile de echilibru | 127 |
| 15.4.3 | Ecuția înclinării normalei | 128 |
| 15.4.4 | Calculul săgeților | 130 |
| 15.4.5 | Plăci încărcate cu sarcină uniform distribuită | 131 |
| 15.4.6 | Plăci încărcate cu o forță concentrată în centru | 135 |

| | |
|---|------------|
| 16. Solicitări elasto-plactice | 139 |
| 16.1 Schematizarea curbei caracteristice a materialelor | 139 |
| 16.2 Încovoierea elasto-plastică a barelor | 141 |
| 16.2.1 Încovoierea pură | 141 |
| 16.2.2 Articulația plastică | 145 |
| 16.2.3 Tensiuni remanente | 147 |
| 16.3 Răsucirea elasto-plastică a barelor | 149 |
| 16.3.1 Relația între momentul de răsucire și tensiuni | 150 |
| 16.3.2 Tensiuni remanente la răsucire | 151 |
| 16.4 Calculul sistemelor static nedeterminate prin metoda stării limită | 153 |
| 16.5 Solicitări elasto-plactice în tuburi cu pereți groși | 155 |
| 16.5.1 Tensiuni radiale și circumferențiale | 155 |
| 16.5.2 Autofretajul | 158 |
| 16.6 Solicitări elasto-plactice în discuri în rotație | 160 |
| 17. Solicitări dinamice | 163 |
| 17.1 Coeficientul dinamic | 163 |
| 17.2 Solicitări prin forțe de inerție constante | 164 |
| 17.2.1 Cablu în translație longitudinală | 164 |
| 17.2.2 Bară în rotație | 165 |
| 17.2.3 Tensiuni în palete | 166 |
| 17.3 Solicitări prin forțe armonice | 171 |
| 17.3.1 Sistem în vibrații libere | 171 |
| 17.3.2 Sistem în vibrații forțate amortizate | 173 |
| 17.4 Solicitări prin șoc | 175 |
| 17.4.1 Răspunsul la o forță variabilă în timp | 175 |
| 17.4.2 Forță constantă aplicată brusc | 176 |
| 17.4.3 Impuls triunghiular descrescător | 178 |
| 17.4.4 Impuls dreptunghiular | 181 |
| 17.4.5 Calculul aproximativ la solicitări prin șoc | 183 |
| 17.4.6 Solicitarea la răsucire prin șoc | 187 |

| | |
|--|------------|
| 18. Oboseala metalelor | 189 |
| 18.1 Deteriorarea prin oboseală | 190 |
| 18.2 Metodologii de calcul la oboseală | 192 |
| 18.3 Calculul la oboseală prin analiza tensiunilor | 194 |
| 18.3.1 Cicluri de solicitări variabile staționare | 194 |
| 18.3.2 Limita de oboseală. Curba lui Wöhler | 196 |
| 18.3.3 Diagramele ciclurilor limită | 199 |
| 18.3.4 Diagrame de durabilitate constantă | 201 |
| 18.3.5 Factori care influențează rezistența la oboseală | 203 |
| 18.3.6 Coeficientul de siguranță la durabilitate nelimitată | 206 |
| 18.3.7 Estimarea duratei de viață | 216 |
| 18.4 Caracteristici mecanice la încărcări ciclice | 218 |
| 18.4.1 Efectul Bauschinger | 218 |
| 18.4.2 Bucla de histerezis | 219 |
| 18.4.3 Ecrusarea și înmuierea ciclică | 220 |
| 18.4.4 Diagrama caracteristică $\sigma - \varepsilon$ ciclică | 221 |
| 18.4.5 Ipoteza lui Massing | 223 |
| 18.4.6 Relația tensiuni-deformații specifice plastice | 224 |
| 18.4.7 Ecuația buclei de histerezis | 224 |
| 18.5 Calculul la oboseală prin analiza deformațiilor specifice | 226 |
| 18.5.1 Diagrama “deformație specifică – durabilitate” | 227 |
| 18.5.2 Determinarea prin calcul a proprietăților de oboseală | 231 |
| 18.5.3 Influența tensiunii medii | 235 |
| 18.5.4 Influența concentrării tensiunilor | 238 |
| 18.5.5 Acumularea deteriorărilor prin oboseală | 244 |
| 18.5.6 Echivalarea ciclurilor cu bucle de histerezis | 246 |
| 18.5.7 Estimarea durabilității la oboseală | 247 |
| 18.6 Calculul la oboseală prin analiza propagării fisurilor | 249 |
| 18.6.1 Mecanica ruperii la încărcări monotone | 249 |
| 18.6.2 Mecanica ruperii la încărcări ciclice | 254 |
| 18.6.3 Limita de oboseală | 257 |

| | | |
|---------------------|---|------------|
| 18.6.4 | Propagarea fisurilor de oboseală | 258 |
| 18.6.5 | Calculul duratei de viață | 260 |
| 18.6.6 | Metoda tolerării defectelor | 263 |
| 19. | Fluajul metalelor | 265 |
| 19.1 | Deformația izotermă sub sarcină constantă | 266 |
| 19.1.1 | Curba de fluaj | 266 |
| 19.1.2 | Fluajul primar | 268 |
| 19.1.3 | Fluajul terțiar | 268 |
| 19.1.4 | Fluajul secundar | 268 |
| 19.1.5 | Limite de fluaj | 274 |
| 19.2 | Ruperea prin fluaj | 275 |
| 19.3 | Relaxarea tensiunilor | 277 |
| 19.4 | Mecanisme fluajului | 280 |
| 19.4.1 | Fluajul prin difuzie | 281 |
| 19.4.2 | Fluajul prin dislocații | 282 |
| 19.4.3 | Fluajul Harper-Dorn | 283 |
| 19.4.4 | Fluajul prin alunecarea grăunților | 283 |
| 19.4.5 | Diagramele mecanismelor de deformare | 284 |
| 19.4.6 | Materiale cu rezistență mare la fluaj | 285 |
| 19.5 | Încercări accelerate la fluaj | 285 |
| 19.5.1 | Durata de rupere la fluaj | 285 |
| 19.5.2 | Metoda Larson-Miller | 286 |
| 19.5.3 | Metoda Sherby-Dorn | 290 |
| 19.6 | Fluajul tranzitoriu | 292 |
| 19.7 | Mecanica ruperii la fluaj | 294 |
| Anexe | | 297 |
| Anexa 7 | Proprietăți monotone ale aliajelor metalice | 297 |
| Anexa 8 | Proprietăți ciclice ale aliajelor metalice | 298 |
| Anexa 9 | Fotoelasticitatea | 299 |
| Bibliografie | | 311 |
| Index | | 313 |

12.

METODE ENERGETICE

În mecanica solidelor se calculează deplasările punctelor unui corp deformabil, în echilibru static sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor.

Ecuatiile de echilibru pentru un volum detașat din corp se exprimă în funcție de tensiuni. Dar tensiunile sunt legate de deformații specifice (ecuațiile constitutive) care la rândul lor sunt legate de deplasări (condițiile de compatibilitate). Aceasta impune rezolvarea unor ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi care oferă așa-numita soluție exactă. Astfel de soluții exacte se pot calcula însă numai pentru corpuri cu geometrii simple și pentru încărcări și condiții la limită relativ simple. La corpuri cu configurații geometrice complexe și condiții la limită și de încărcare generale, obținerea unor astfel de soluții este imposibilă. Se recurge la soluții aproximative, bazate pe lucrul mecanic și energia potențială, și la metode variaționale care impun condiții mai puțin stricte asupra funcțiilor care aproximează câmpul de deplasări.

În final, în locul rezolvării unor ecuații diferențiale cu condiții la limită complicate, se rezolvă integrale ale unor funcții polinomiale relativ simple. Calculul deplasărilor se face prin metode bazate pe principiul lucrului mecanic virtual și principiul minimului energiei potențiale totale. În acest capitol se mai prezintă metoda Rayleigh-Ritz, metoda Mohr-Maxwell, metoda lui Castigliano, precum și aplicarea acestora la rezolvarea sistemelor static nedeterminate prin metoda eforturilor.

12.1 Energia potențială de deformație

În cazul general de solicitare, când în secțiunea transversală acționează eforturile N , T , M_i și M_t , energia de deformație acumulată de o bară dreaptă, în echilibru static, este

$$U = \int_{\ell} \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_{\ell} \frac{T^2 dx}{2GA_f} + \int_{\ell} \frac{M_i^2 dx}{2EI_y} + \int_{\ell} \frac{M_t^2 dx}{2GI_t}. \quad (12.1)$$

unde s-au utilizat expresiile (5.5), (6.19) și (8.16). Al doilea termen din membrul drept al relației (12.1) reprezintă energia de deformație acumulată datorită forțelor tăietoare, în care aria de forfecare $A_f = k_f A$, iar k_f este factorul de forfecare (8.45).

Uneori este utilă exprimarea energiei de deformație în funcție de deplasări. Pentru o bară solicitată la întindere, utilizând relațiile (5.5,a), (3.22) și (3.18), se obține

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV = \int_{\ell} \int_A \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_{\ell} E A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (12.2)$$

Pentru un arbore solicitat la răsucire, utilizând relațiile (6.1), (6.5) și (6.19, a), se obține

$$U = \int_V \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV = \int_{\ell} \int_A \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} r \right)^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_{\ell} G I_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (12.3)$$

Pentru o bară solicitată la încovoiere simetrică pură, utilizând relațiile (8.3), (8.16) și (8.50), rezultă

$$U = \int_{\ell} \int_A \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_{\ell} E I_y \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\ell} E I_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (12.4)$$

Pentru o bară solicitată la încovoiere simplă, însumând energia de încovoiere și de forfecare (v. par. 8.4.3), se obține

$$U = \frac{1}{2} \int_{\ell} E I_y \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\ell} G A_f \left(\frac{dw}{dx} + \varphi \right)^2 dx. \quad (12.5)$$

12.2 Teorema reciprocității lucrului mecanic (Teorema lui Betti)

Se consideră un corp elastic, în echilibru static, asupra căruia se aplică două stări succesive de solicitare, produse de două grupe succesive de sarcini și reacțiuni, F_i și F'_i ($i=1,2,\dots,n$). Forțele F'_i se aplică în aceleași puncte și pe aceleași direcții ca și forțele F_i , putând fi considerate drept alte valori ale acestora.

Aplicând forțele F_i corpul se deformează. Se notează cu u_i proiecția deplasării punctului de aplicație al forței F_i pe direcția acesteia.

Lucrul mecanic al forțelor exterioare are expresia (stabilită de B. P. E. Clapeyron în 1852)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i . \quad (12.6)$$

Corespunzător, lucrul mecanic al forțelor F'_i pe deplasările u'_i are expresia

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F'_i u'_i . \quad (12.7)$$

La trecerea de la prima stare de solicitare la a doua, forțele exterioare efectuează lucrul mecanic

$$L' - L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F'_i u'_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i . \quad (12.8)$$

Dacă asupra corpului se aplică întâi primul grup de sarcini F_i , care produce lucrul mecanic L , apoi se aplică forțele adiționale $(F'_i - F_i)$, astfel încât lucrul mecanic total devine L' , se poate considera că diferența $(L' - L)$ este produsă de forțele elastice $(F'_i - F_i)$ pe deplasările $(u'_i - u_i)$ și de forțele F_i , care se aflau aplicate pe corp și care se deplasează pe $(u'_i - u_i)$, rămânând constante. Deci se poate scrie

$$\begin{aligned} L' - L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (F'_i - F_i) (u'_i - u_i) + \sum_{i=1}^n F_i (u'_i - u_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F'_i u'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u'_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F'_i u_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i . \end{aligned} \quad (12.9)$$

Egalând expresiile (12.8) și (12.9), deci aplicând principiul suprapunerii efectelor, rezultă

$$\sum_{i=1}^n F_i u'_i = \sum_{i=1}^n F'_i u_i . \quad (12.10)$$

Această egalitate exprimă *teorema reciprocității lucrului mecanic* (enunțată de E. Betti în 1872):

Dacă asupra unui sistem elastic se aplică succesiv două încărcări diferite, atunci lucrul mecanic efectuat de forțele din prima încărcare pe deplasările produse de a doua încărcare este egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele din a doua încărcare pe deplasările produse de prima încărcare.

În definiția de mai sus s-au considerat forțe și deplasări generalizate. Astfel, în cazul solicitării prin momente (cupluri) concentrate, deplasările corespunzătoare sunt rotații.

12.3 Teorema reciprocității deplasărilor (Teorema lui Maxwell)

Se consideră o bară simplu rezemată, la care prima încărcare este forța F aplicată în secțiunea i (fig.12.1, a) iar a doua încărcare este tot o forță F aplicată în secțiunea j .

În general, pentru forțele aplicate în secțiunile i și j , relația (12.10) devine

$$F'_i u_i + F'_j u_j = F_i u'_i + F_j u'_j. \quad (12.11)$$

Pentru sistemul particular de forțe ales și cu notațiile din figura 12.1, rezultă

$$\begin{aligned} F_i = F, & \quad u'_i = w_{ij}, & \quad F_j = 0, \\ F'_i = 0, & \quad u_j = w_{ji}, & \quad F'_j = F, \end{aligned}$$

care, înlocuite în relația (12.11), conduc la $F w_{ji} = F w_{ij}$, sau

$$w_{ji} = w_{ij}. \quad (12.12)$$

Această egalitate exprimă *teorema reciprocității deplasărilor* (enunțată de J. C. Maxwell în 1864):

Deplasarea produsă în secțiunea i când o forță este aplicată în secțiunea j este egală cu deplasarea produsă în secțiunea j când aceeași forță este aplicată în secțiunea i , cu condiția ca direcțiile forțelor și deplasărilor să fie aceleași în cele două cazuri.

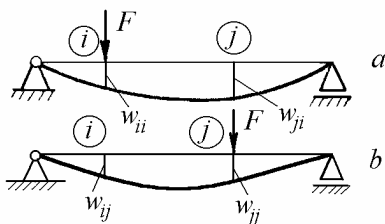


Fig. 12.1

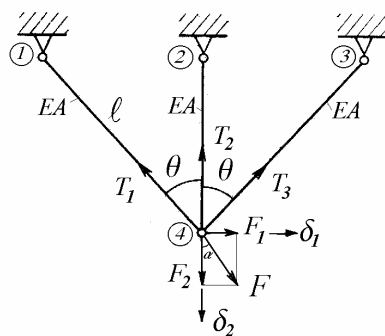


Fig. 12.2

Ca și în cazul teoremei lui Betti, în teorema lui Maxwell se pot considera deplasări și forțe generalizate, deci rotiri și momente concentrate.

Dacă $F = 1$, atunci se notează $w_{ij} = \delta_{ij}$, iar δ_{ij} se numește *coeficient de influență* (sau *flexibilitate*). Acesta reprezintă deplasarea în i produsă de o forță egală cu unitatea aplicată în j . Egalitatea (12.12) devine

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (12.13)$$

relație care atestă simetria matricii de flexibilitate a sistemelor elastice.

12.4 Principiul lucrului mecanic virtual

Principiul lucrului mecanic virtual reprezintă o formulare alternativă a condițiilor de echilibru static. În continuare se va utiliza forma cunoscută ca *principiul deplasărilor virtuale*.

Conform principiului lucrului mecanic virtual: *condiția necesară și suficientă ca un solid deformabil să fie în echilibru static este ca lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare să fie egal cu lucrul mecanic virtual al forțelor interioare, pentru orice câmp de deplasări virtuale cinematic admisibile*

$$\delta L_E = \delta L_I. \quad (12.14)$$

În relația (12.14) δL_E este lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare F_j pe deplasările virtuale δu_j independente de starea de sollicitare și compatibile cu legăturile

$$\delta L_E = \sum_{j=1}^n F_j \delta u_j = \sum_{j=1}^n \delta (F_j u_j) = \delta \sum_{j=1}^n F_j u_j, \quad (12.15)$$

iar δL_I este lucrul mecanic virtual al forțelor interioare care acționează asupra elementelor corpului deformabil.

Simbolul " δ ", introdus de J. L. Lagrange (1759), accentuează caracterul virtual al *variațiilor*, spre deosebire de simbolul " d " care denotă *diferențiale* ale deplasărilor. El nu trebuie confundat cu notația pentru coeficienți de influență.

În formularea generală, $L_E = \sum_{j=1}^n F_j u_j$, expresie în care lipsește factorul

$1/2$ care apare în expresia lucrului mecanic al forțelor elastice, deoarece forțele exterioare rămân constante în timpul acțiunii pe deplasările virtuale.

Aparent, formularea de mai sus contrazice principiul lucrului mecanic virtual stabilit de Johan Bernoulli (1727) pentru corpuri nedeformabile. Extins la sisteme de puncte materiale, interconectate cu elemente elastice, acesta se enunță astfel: *condiția necesară și suficientă ca un sistem de puncte materiale să fie în*

echilibrul static este ca lucrul mecanic virtual total al forțelor exterioare și interioare să fie nul pentru orice deplasare virtuală cinematic admisibilă

$$\delta L = \delta L_E + \delta L'_I = 0. \quad (12.16)$$

În relația (12.16) $\delta L'_I$ este lucrul mecanic virtual al forțelor interioare care acționează asupra punctelor materiale, forțe care, conform principiului acțiunii și reacțiunii, sunt egale și de sens contrar celor care acționează asupra elementelor corpului deformabil, deci

$$\delta L_I = -\delta L'_I. \quad (12.17)$$

La corpuri deformabile, lucrul mecanic efectuat împotriva interacțiunilor între elementele infinitezimale care compun corpul este egal cu variația energiei de deformație δU . Pentru a obține lucrul mecanic efectuat de forțele interioare semnul trebuie schimbat. Deci lucrul mecanic efectuat de forțele interioare (care acționează în punctele de aplicație ale forțelor exterioare) în timpul unor deplasări virtuale este egal cu variația energiei de deformație cu semn schimbat

$$\delta L'_I = -\delta U. \quad (12.18)$$

Pentru un corp solid în echilibru, *creșterea virtuală a energiei de deformație este egală cu lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare pe orice creștere virtuală cinematic admisibilă a câmpului de deplasări* (G. Kirchhoff)

$$\delta U = \delta L_E. \quad (12.19)$$

De notat că lucrul mecanic virtual al reacțiunilor din reazemele rigide este nul. Fiind o condiție de echilibru, principiul deplasărilor virtuale este independent de comportarea materialelor, fiind valabil atât pentru materiale elastice cât și pentru materiale neelastice. El este valabil doar pentru forțe conservative, deci care nu își modifică direcția în timpul acțiunii pe deplasările virtuale.

Exemplul 12.1

La sistemul din figura 12.2, compus din trei bare concurente articulate la capete, se cer forțele din bare și deplasarea punctului de aplicație al forței F .

Rezolvare

În metoda bazată pe principiul deplasărilor virtuale, se consideră trei stări ale sistemului analizat:

1. Starea inițială, în care nu există forțe exterioare și barele nu sunt pretensionate (fig. 12.3, a).

2. Starea finală de echilibru static, în care forța exterioară F , de componente $F_1 = F \sin \alpha$ și $F_2 = F \cos \alpha$, produce deplasarea articulației 4, de componente u_1 și u_2 (fig. 12.3, b).

Asupra articulației 4 acționează forțele exterioare F_1 , F_2 și forțele interioare T_1 , T_2 , T_3 (fig. 12.3, c). În bare acționează forțe interioare egale și de sens contrar, care produc alungirile Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 (fig. 12.3, d).

3. O stare imaginară, în care se dă articulației 4 o deplasare virtuală de componente δu_1 și δu_2 (fig. 12.3, e), căreia îi corespund alungiri virtuale ale barelor $\delta \Delta_1$, $\delta \Delta_2$, $\delta \Delta_3$ (fig. 12.3, f), forțele aplicate rămânând constante.

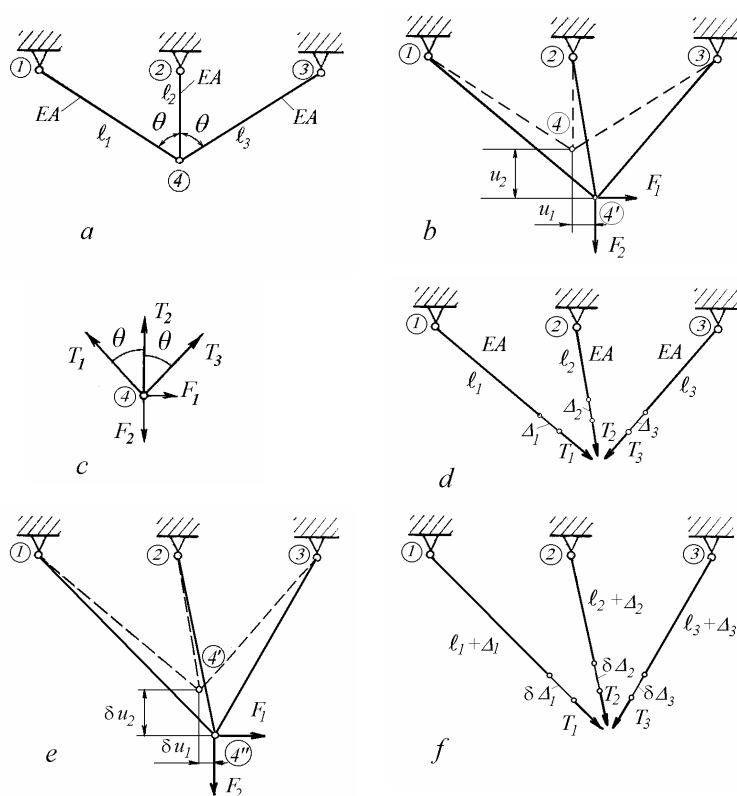


Fig. 12.3

Deplasările virtuale δu_1 și δu_2 și alungirile virtuale $\delta \Delta_1$, $\delta \Delta_2$, $\delta \Delta_3$ satisfac ecuațiile de compatibilitate (5.27)

$$\begin{aligned}\delta \Delta_1 &= \delta u_1 \sin \theta + \delta u_2 \cos \theta, \\ \delta \Delta_2 &= \delta u_2, \\ \delta \Delta_3 &= -\delta u_1 \sin \theta + \delta u_2 \cos \theta.\end{aligned}\tag{12.20}$$

Pentru cele trei bare, relațiile forță-deformație (5.28) se scriu

$$\Delta_1 = \frac{T_1 \ell}{EA}, \quad \Delta_2 = \frac{T_2 \ell \cos \theta}{EA}, \quad \Delta_3 = \frac{T_3 \ell}{EA}. \quad (12.21)$$

Conform ecuației (12.17), se egalează lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare cu lucrul mecanic virtual al forțelor care acționează asupra barelor

$$F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 = T_1 \delta \Delta_1 + T_2 \delta \Delta_2 + T_3 \delta \Delta_3, \quad (12.22)$$

egalitate care, ținând cont de relațiile (12.20), se mai scrie

$$\delta u_1 (T_1 \sin \theta - T_3 \sin \theta - F_1) + \delta u_2 (T_1 \cos \theta + T_2 + T_3 \cos \theta - F_2) = 0.$$

Întrucât deplasările virtuale sunt arbitrare, parantezele trebuie să fie nule, de unde rezultă ecuațiile de echilibru (5.26) ale forțelor aplicate articulației 4

$$\begin{aligned} T_1 \sin \theta - T_3 \sin \theta &= F_1, \\ T_1 \cos \theta + T_2 + T_3 \cos \theta &= F_2. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Se confirmă faptul că principiul lucrului mecanic virtual reprezintă o formulare alternativă a condițiilor de echilibru static.

Înlocuind relațiile (12.21) în (5.27), se obțin relațiile între eforturi și deplasări care, înlocuite în (12.23), permit calculul componentelor deplasării punctului 4 din relațiile (5.30).

12.5 Principiul minimului energiei potențiale totale

Energia potențială totală Π a unui corp elastic este definită ca suma energiei de deformație U și a potențialului forțelor exterioare U_p

$$\Pi = U + U_p. \quad (12.24)$$

Potențialul forțelor exterioare U_p este egal cu lucrul mecanic al forțelor exterioare L_E (calculat considerând forțele constante) cu semn schimbat

$$U_p = -L_E. \quad (12.25)$$

Semnul minus apare deoarece forțele exterioare își pierd din capacitatea de a efectua lucru mecanic atunci când se deplasează în direcția în care acționează. O forță exterioară F_j are energia potențială $(-F_j u_j)$ în loc de $\left(-\frac{1}{2} F_j u_j\right)$,

deoarece acest potențial apare din mărimea forței și din capacitatea ei de a se deplasa, fiind independent de proprietățile elastice ale corpului asupra căruia acționează.

Energia potențială totală are deci expresia

$$\Pi = U - L_E . \quad (12.26)$$

Pe baza relației (12.19) rezultă că

$$\delta \Pi = \delta U - \delta L_E = 0 , \quad (12.27)$$

deci, *la echilibru static, energia potențială totală are o valoare staționară*. Pentru un corp în echilibru stabil, extremul energiei potențiale totale este un minim absolut, $\delta^2 \Pi > 0$.

Principiul minimului energiei potențiale totale se enunță astfel:

Dacă un solid deformabil este în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor, atunci energia potențială totală are o valoare minimă.

Reciproc, dacă sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor energia potențială totală a unui solid deformabil are o valoare minimă, atunci acesta este în echilibru stabil.

Astfel, se poate considera că relația (12.27) este mai degrabă o condiție care stabilește sau definește echilibrul, decât un rezultat al echilibrului.

Altă formulare echivalentă este următoarea: *Pentru o configurație de echilibru stabil, deplasările cinematic admisibile care satisfac condițiile de echilibru sunt cele care minimizează energia potențială totală.*

Reciproc, orice câmp de deplasări cinematic admisibil și care minimizează energia potențială totală reprezintă o configurație de echilibru stabil.

La sistemul din figura 12.2, compus din trei bare concurente articulate la capete, energia de deformație pentru o bară este

$$U_i = \frac{1}{2} T_i \Delta_i = \frac{1}{2} \frac{EA_i}{l_i} \Delta_i^2 , \quad (12.28)$$

iar energia potențială exterioară este

$$U_p = - \sum_i F_i u_i . \quad (12.29)$$

Exprimând alungirile în funcție de deplasări conform condițiilor de compatibilitate (5.27), energia potențială totală (12.26) se scrie sub forma

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{EA}{2l}(u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta)^2 + \frac{EA}{2l \cos \theta} u_2^2 + \\ & + \frac{EA}{2l}(-u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta)^2 - F_1 u_1 - F_2 u_2. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Anulând derivatele lui Π în raport cu fiecare variabilă independentă

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0, \quad (12.31)$$

se obțin ecuațiile de echilibru (12.23).

Deoarece $\delta L_I = \delta U$, lucrul mecanic virtual al forțelor interioare se poate calcula pe baza relației (5.5, a) și legii lui Hooke (3.22)

$$\delta L_I = \int_V \delta \varepsilon \sigma \, dV \quad (12.32)$$

unde $\delta \varepsilon$ sunt deformații specifice virtuale, compatibile cu deplasările virtuale ale forțelor exterioare.

La barele solicitate la întindere, înlocuind $\sigma = E \varepsilon$ și $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$, se obține

$$\delta L_I = \int_V \delta \varepsilon \sigma \, dV = \int_l \delta \varepsilon E \varepsilon A \, dx = \int_l \frac{\partial \delta u}{\partial x} EA \frac{\partial u}{\partial x} \, dx. \quad (12.33)$$

La barele solicitate la încovoiere, înlocuind $\varepsilon = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, rezultă

$$\delta L_I = \int_l \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\int_A z^2 \, dA \right) \, dx = \int_l \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \, dx. \quad (12.34)$$

Aceste expresii sunt utilizate în egalitatea (12.17), la rezolvarea problemelor prin metode bazate pe principiul deplasărilor virtuale.

12.6 Metoda Rayleigh-Ritz

În metoda Rayleigh-Ritz, aplicată unei grinzi solicitate la încovoiere, săgeata $w(x)$ este aproximată printr-o dezvoltare într-o serie finită

$$w(x) \cong \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \quad (12.35)$$

unde a_j sunt coeficienți nedeterminați, numiți *coordonate generalizate*, iar $\varphi_j(x)$ sunt *funcții admisibile* date, care îndeplinesc condițiile la limită geometrice (cinematice) și sunt continue în intervalul de definiție (W. Ritz, 1908).

Înlocuind deplasările (12.35) în expresia energiei potențiale totale Π , aceasta devine funcție de coeficienții a_j , ale căror valori se determină din condițiile de staționaritate

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (12.36)$$

care conduc la un sistem algebric liniar în coeficienții a_j .

Soluțiile se înlocuiesc în expresia (12.35) care reprezintă o deformată aproximativă a sistemului, cu atât mai exactă cu cât se aleg mai mulți termeni în seria respectivă.

Exemplul 12.2

La grinda din figura 12.4 se cere deplasarea verticală a punctului de aplicație al forței F . Se dau: $E = 210 \text{ MPa}$, $I_y = 1600 \text{ mm}^4$, $l = 3 \text{ m}$, $F = 100 \text{ N}$ și $q = 200 \text{ N/m}$.

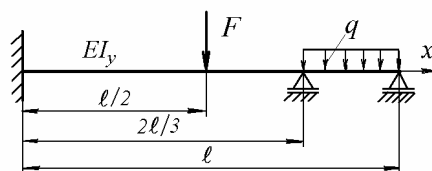


Fig. 12.4

Rezolvare

Utilizând expresia (12.4) a energiei de deformație pentru o bară sollicitată la încovoiere, neglijând efectul forței tăietoare, energia potențială totală (12.26) este

$$\Pi = \frac{1}{2} E I_y \int_0^{\ell} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_{2\ell/3}^{\ell} q w(x) dx - F w\left(\frac{\ell}{2}\right). \quad (12.37)$$

Condițiile la limită geometrice sunt

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w\left(\frac{2\ell}{3}\right) = 0, \quad w(\ell) = 0. \quad (12.38)$$

În continuare, pentru simplificare săgețile se aproximează sub forma unei serii de numai doi termeni

$$w(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) \quad (12.39)$$

unde funcțiile

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2(3x-2\ell)(x-\ell)}{\ell^4}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x^3(3x-2\ell)(x-\ell)}{\ell^5}, \quad (12.40)$$

satisfac toate condițiile geometrice (12.38)

Înlocuind funcția (12.39) în expresia (12.37) se obține funcționala

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} E I_y \int_0^\ell (a_1 \varphi_1'' + a_2 \varphi_2'')^2 dx - \int_{2\ell/3}^\ell q (a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2) dx - \\ & - F [a_1 \varphi_1(\ell/2) + a_2 \varphi_2(\ell/2)] \end{aligned} \quad (12.41)$$

Condițiile de staționaritate în raport cu a_1 și a_2 se scriu

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = E I_y \int_0^\ell (a_1 \varphi_1'' + a_2 \varphi_2'') \varphi_1'' dx - \int_{2\ell/3}^\ell q \varphi_1 dx - F \varphi_1(\ell/2) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = E I_y \int_0^\ell (a_1 \varphi_1'' + a_2 \varphi_2'') \varphi_2'' dx - \int_{2\ell/3}^\ell q \varphi_2 dx - F \varphi_2(\ell/2) = 0.$$

Înlocuind funcțiile (12.40) și, pentru datele numerice ale problemei, $F = q\ell/6$, se obține sistemul algebric

$$\begin{aligned} \frac{56}{5} \frac{E I_y}{\ell^3} a_1 + 10 \frac{E I_y}{\ell^3} a_2 &= -\frac{11}{4320} q \ell, \\ 10 \frac{E I_y}{\ell^3} a_1 + \frac{72}{7} \frac{E I_y}{\ell^3} a_2 &= -\frac{269}{46656} q \ell. \end{aligned}$$

De exemplu, coeficientul lui a_1 din prima ecuație este

$$E I_y \int_0^\ell (\varphi_1'')^2 dx = E I_y \int_0^\ell \frac{1}{\ell^8} (36x^2 - 30\ell x + 4\ell^2)^2 dx = \frac{56}{5} \frac{E I_y}{\ell^3}.$$

Soluțiile sunt

$$a_1 = 0,00207 \frac{q \ell^4}{E I_y}, \quad a_2 = -0,00257 \frac{q \ell^4}{E I_y}.$$

În punctul de aplicație al forței F , săgeata este

$$\begin{aligned} w(\ell/2) &= a_1 \varphi_1(\ell/2) + a_2 \varphi_2(\ell/2) = \\ &= \frac{1}{16} a_1 + \frac{1}{32} a_2 = 4,9 \cdot 10^{-5} \frac{q \ell^4}{E I_y} = 2,48 \text{ mm}. \end{aligned}$$

În principiu, funcția momentelor încovoietoare poate fi obținută înlocuind expresia analitică a săgeților în ecuația diferențială a fibrei medii deformate (8.50). Funcția forțelor tăietoare se obține apoi prin încă o derivare. Reacțiunile se obțin evaluând aceste funcții pentru abscisele corespunzătoare reazemelor. Datorită derivărilor succesive, valorile eforturilor au erori mai mari decât valorile deplasărilor.

12.7 Prima teoremă a lui Castigliano

Din relațiile (12.15) și (12.19) rezultă

$$\delta U = \sum_{j=1}^n F_j \delta u_j, \quad (12.42)$$

Utilizând dezvoltarea în serie

$$\delta U = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial u_j} \delta u_j,$$

relația (12.42) devine

$$\sum_{j=1}^n F_j \delta u_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial u_j} \delta u_j,$$

de unde se deduce

$$F_j = \frac{\partial U}{\partial u_j}. \quad (12.43)$$

Relația (12.43) exprimă analitic *prima teoremă a lui A. Castigliano* (1875):

O forță oarecare este egală cu derivata parțială a energiei potențiale de deformație în raport cu proiecția deplasării punctului de aplicație al forței pe direcția acesteia.

12.8 Teorema Crotti-Engesser

La materiale neelastice sau la structuri cu neliniarități geometrice, caracteristica forță-deformație este neliniară (Fig. 12.5).

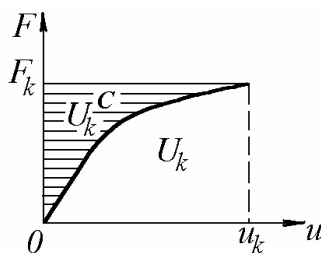


Fig. 12.5

Aria suprafeței hașurate din figura 12.5 definește *energia potențială complementară*, mărime în general fără semnificație fizică (F. Engesser, 1859). Aria suprafeței nehașurate de sub curbă definește lucrul mecanic al forței F_k , egal cu energia potențială acumulată de corp.

În cazul acțiunii mai multor forțe, energia potențială complementară *totală* se poate exprima sub forma

$$U^C = \sum_{k=1}^n F_j u_j - U, \quad (12.44)$$

Se calculează derivata parțială în raport cu o forță F_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^C}{\partial F_j} &= \sum_{k=1}^n \left(F_k \frac{\partial u_k}{\partial F_j} + u_k \frac{\partial F_k}{\partial F_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial F_j} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(F_k \frac{\partial u_k}{\partial F_j} + u_k \frac{\partial F_k}{\partial F_j} - \frac{\partial U}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial F_j} \right) =, \\ &= \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial F_k}{\partial F_j} + \sum_{k=1}^n \left(F_k - \frac{\partial U}{\partial u_k} \right) \frac{\partial u_k}{\partial F_j}. \end{aligned}$$

Deoarece, conform relației (12.43), expresia din paranteză este nulă, rezultă

$$\frac{\partial U^C}{\partial F_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial F_j} u_k = u_j,$$

deci

$$u_j = \frac{\partial U^C}{\partial F_j}. \quad (12.45)$$

Relația (12.45) exprimă *teorema Crotti-Engesser*, care se mai numește și *teorema lui Castigliano generalizată* :

Derivata parțială a energiei potențiale complementare a unui sistem deformabil în raport cu o forță este egală cu proiecția deplasării punctului de aplicație al forței pe direcția acesteia.

12.9 A doua teoremă a lui Castigliano

În cazul sistemelor liniare, între sarcinile aplicate și deplasările punctelor de aplicație ale acestora există relații liniare. Astfel, curba din figura 12.5 devine o linie dreaptă. Rezultă că la corpuri elastice liniare, energia complementară este egală cu energia de deformație

$$U = U^C. \quad (12.46)$$

Înlocuind energia complementară conform egalității (12.46) în relația (12.45), se obține

$$u_j = \frac{\partial U}{\partial F_j}. \quad (12.47)$$

Relația (12.47) exprimă analitic *a doua teoremă a lui Castigliano* (1875):

Derivata parțială a energiei de deformație, acumulate de un sistem elastic liniar, în raport cu o forță exterioară este egală cu proiecția deplasării punctului de aplicație al forței pe direcția acesteia.

În cazul unui moment exterior concentrat, derivata parțială a energiei de deformație în raport cu un cuplu este egală cu rotirea în punctul de aplicație a acestuia.

12.9.1 Deformații la încovoiere

Pentru o bară sollicitată la încovoiere, energia de deformație are expresia (8.16)

$$U = \int_{\ell} \frac{M^2 dx}{2 EI_y}.$$

Conform teoremei lui Castigliano (12.47), la o bară cu secțiunea constantă, deplasarea pe direcția unei forțe exterioare F_j este

$$\delta_j = \frac{\partial U}{\partial F_j} = \frac{\partial}{\partial F_j} \int_{\ell} \frac{M^2 dx}{2 EI_y} = \frac{1}{EI_y} \int_{\ell} M \frac{\partial M}{\partial F_j} dx, \quad (12.48)$$

iar unghiul de rotire în punctul de aplicație al unui cuplu M_j este

$$\varphi_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} = \frac{1}{EI_y} \int_{\ell} M \frac{\partial M}{\partial M_j} dx. \quad (12.49)$$

Pentru a calcula deplasarea într-un punct în care (pe direcția dorită) nu acționează o forță exterioară, se introduce o forță fictivă, se calculează expresia analitică a momentului încovoietor M funcție de forțele exterioare și de sarcina fictivă, se calculează derivata momentului încovoietor în raport cu forța fictivă, apoi se anulează forța fictivă în expresia lui M care se introduce în relația (12.48).

Dacă asupra sistemului acționează mai multe forțe cu notații similare, atunci cea în dreptul căreia se calculează deformația se notează cu un simbol diferit de al celorlalte. După efectuarea derivatei se revine la simbolul inițial.

La bare cotite, U din relația (12.48) reprezintă energia de deformație totală a barei, egală cu suma energiilor de deformație ale barelor componente, deci în fața integralei trebuie introdus semnul "sumă".

Exemplul 12.3

Se cere să se calculeze săgeata și unghiul de rotire al liniei elastice în capătul liber al barei din figura 12.6.

Rezolvare

Pentru determinarea săgeții se utilizează relația

$$w_2 = \frac{1}{EI_y} \int_{\ell} M \frac{\partial M}{\partial F} dx.$$

Se calculează momentul încovoietor în secțiunea x

$$M(x) = -F x$$

și derivata

$$\frac{\partial M}{\partial F} = -x.$$

Rezultă săgeata

$$w_2 = \frac{1}{EI_y} \int_0^{\ell} (-Fx)(-x) dx = \frac{F \ell^3}{3EI_y}.$$

Pentru determinarea unghiului de rotire, în punctul 2 se introduce momentul fictiv M_0 .

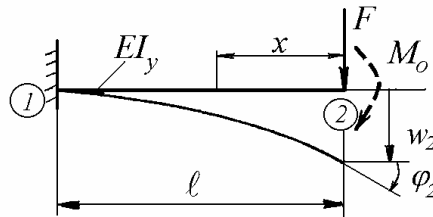


Fig. 12.6

Se calculează

$$M(x) = -Fx - M_0, \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = -1,$$

apoi, înlocuind $M_0 = 0$ în expresia momentului încovoietor, se calculează unghiul de rotire

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI_y} \int_{\ell} M \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^{\ell} (-Fx)(-1) dx = \frac{F \ell^2}{2EI_y}.$$

12.9.2 Deformații la încovoiere și răsucire

Pentru bare cotite sollicitate la încovoiere și răsucire, energia de deformație are expresia

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_i^2}{2E_i I_{y_i}} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_{t_i}^2}{2G_i I_{t_i}} dx,$$

unde i este numărul barelor drepte componente.

Deplasarea pe direcția unei forțe exterioare F este

$$\delta_j = \frac{\partial U}{\partial F} = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_i}{E_i I_{y_i}} \frac{\partial M_i}{\partial F} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_{t_i}}{G_i I_{t_i}} \frac{\partial M_{t_i}}{\partial F} dx, \quad (12.50)$$

Exemplul 12.4

Se cere să se calculeze deplasarea verticală a capătului liber al barei cotate din figura 12.7.

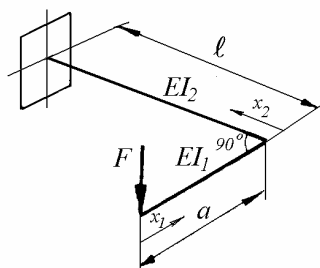


Fig. 12.7

Rezolvare

În cele două bare acționează momentele încovoietoare $M_1(x_1) = -F x_1$, respectiv $M_2(x_2) = -F x_2$ și momentul de răsucire $M_{t_2} = F a$. Se calculează derivatele în raport cu F . Săgeata în capătul liber este

$$w = \frac{1}{EI_1} \int_0^a (-F x_1)(-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI_2} \int_0^\ell (-F x_2)(-x_2) dx_2 + \frac{1}{GI_t} \int_0^\ell (F a)(a) dx_2$$

sau

$$w = \frac{F a^3}{3EI_1} + \frac{F \ell^3}{3EI_2} + \frac{F a^2 \ell}{GI_t}.$$

12.9.3 Deformații la încovoierea simplă

La o bară dreaptă, sollicitată la încovoiere simplă, energia de deformație are expresia

$$U = \int_\ell \frac{T_z^2 dx}{2 G A_f} + \int_\ell \frac{M_y^2 dx}{2 E I_y}.$$

unde $A_f = k_f A$, iar factorul de forfecare k_f se poate calcula din condiția (8.45)

$$\frac{T_z^2}{2 G k_f A} = \int_A \frac{\tau_{xz}^2}{2 G} dA.$$

Dacă tensiunile tangențiale τ_{xz} se calculează pe baza formulei lui Juravski (8.37), rezultă

$$k_f = \frac{I_y^2 / A}{\int_A \left(\frac{S_y^*}{b} \right)^2 dA}.$$

La bara de secțiune dreptunghiulară

$$S_y^* = \frac{bh^2}{8} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right),$$

$$\int_A \left(\frac{S_y^*}{b} \right)^2 dA = \frac{h^2}{64} \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)^2 b dz = \frac{bh^5}{120}$$

deci

$$k_f = \frac{\left(\frac{bh^3}{12} \right)^2 \cdot \frac{1}{bh}}{\frac{bh^5}{120}} = \frac{5}{6} \cong 0,833.$$

Exemplul 12.5

Se cere să se calculeze săgeata în capătul liber al barei din figura 12.6 ținând cont și de efectul forței tăietoare.

Rezolvare

Aplicând teorema lui Castigliano (12.47), se obține

$$w_2 = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{EI_y} \int_{\ell} M_y \frac{\partial M_y}{\partial F} dx + \frac{1}{GA_f} \int_{\ell} T_z \frac{\partial T_z}{\partial F} dx,$$

$$w_2 = \frac{1}{EI_y} \int_0^{\ell} (-Fx)(-x) dx + \frac{1}{GA_f} \int_0^{\ell} F \cdot 1 \cdot dx,$$

deci

$$w_2 = \frac{F \ell^3}{3EI_y} + \frac{F \ell}{GA_f}.$$

Se notează

$$w_2 = w_i + w_f .$$

Raportul între săgeata produsă de forța tăietoare w_f și săgeata produsă de momentul încovoiator w_i este

$$\frac{w_f}{w_i} = \frac{3 E I_y}{G A_f \ell^2} .$$

Ținând cont că

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad A_f = k_f A, \quad \frac{I_y}{A} = i_y^2,$$

se obține

$$\frac{w_f}{w_i} = \frac{6(1+\nu)}{k_f} \left(\frac{i_y}{\ell} \right)^2 .$$

La o bară din oțel cu $\nu = \frac{1}{3}$, de secțiune dreptunghiulară cu $k_f = \frac{5}{6}$ și $i_y = \frac{h}{2\sqrt{3}}$, rezultă $\frac{w_f}{w_i} = \frac{4}{5} \left(\frac{h}{\ell} \right)^2$.

Pentru $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{5}$, $\frac{w_f}{w_i} = \frac{4}{125} \cong 0,03$ deci pentru bare scurte, având lungimea de cinci ori mai mare ca înălțimea, săgeata datorită forței tăietoare reprezintă numai 3% din cea datorită momentului încovoiator.

12.10 Metoda Mohr-Maxwell

Într-o secțiune oarecare a unei bare drepte, solícitate la încovoiere simetrică, momentul încovoiator se poate exprima sub forma

$$M = m F_j + \mu, \quad (12.51)$$

unde primul termen din membrul drept arată contribuția forței F_j , iar al doilea termen arată contribuția celorlalte sarcini aplicate barei.

Se calculează derivata în raport cu F_j

$$\frac{\partial M}{\partial F_j} = m. \quad (12.52)$$

Înlocuind expresia (12.52) în relația (12.48), rezultă

$$\delta_j = \frac{1}{EI_y} \int_{\ell} M m \, dx. \quad (12.53)$$

Dacă în expresia (12.51) se înlocuiește $F_j = 1$ și $\mu = 0$, rezultă $M = m$, deci în relația (12.53) m reprezintă momentul încovoietor într-o secțiune a barei care are aceeași rezemare ca bara studiată, dar este solicitată de o singură forță egală cu unitatea, aplicată în punctul și pe direcția pe care se calculează deformația.

Unghiul de rotire se calculează cu o relație similară, în care m este momentul încovoietor produs în secțiunea x atunci când asupra barei acționează un singur cuplu egal cu unitatea, aplicat în punctul respectiv.

În general, relația pentru calculul deplasărilor la încovoiere prin *metoda Mohr-Maxwell* (1874) are forma

$$u_j = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_i m_i}{(EI)_i} \, dx, \quad (12.54)$$

unde suma se extinde pe toate intervalele în care funcția de integrat este diferită.

Relații asemănătoare se stabilesc și pentru celelalte solicitări. Fiind bazat pe o integrală, în care intervine expresia analitică a efortului produs de o sarcină unitate aplicată în punctul și pe direcția deplasării calculate, procedeul se mai numește *metoda sarcinii unitate* sau *metoda sarcinii fictive*.

În cazul unei bare solicitate la încovoiere oblică, de un moment de componente M_y și M_z , componentele deplasării în lungul axelor centrale neprincipale se pot calcula cu relațiile

$$\delta_y = \frac{1}{E} \frac{I_z \Delta_y + I_{yz} \Delta_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad \delta_z = \frac{1}{E} \frac{I_{yz} \Delta_y + I_y \Delta_z}{I_y I_z - I_{yz}^2},$$

unde

$$\Delta_y = \int_{\ell} M_y m_y \, dx, \quad \Delta_z = \int_{\ell} M_z m_z \, dx.$$

Exemplul 12.6

Se cere să se calculeze săgeata la mijlocul barei din figura 12.8, *a*.

Rezolvare

Datorită simetriei, relația (12.53) se scrie

$$w_3 = \frac{2}{EI_y} \int_0^{l/2} M m dx,$$

unde $M = \frac{F}{2}x$, iar din figura 12.8, b se obține $m = \frac{x}{2}$.

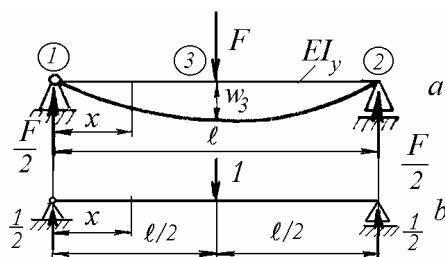


Fig. 12.8

Rezultă

$$w_3 = \frac{2}{EI_y} \int_0^{l/2} \frac{F x}{2} \frac{x}{2} dx = \frac{Fl^3}{48 EI_y}. \quad (12.55)$$

Exemplul 12.7

Se cere să se calculeze deplasarea capătului liber al barei din figura 12.9, a .

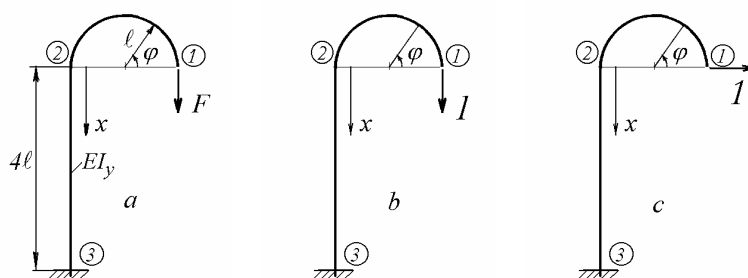


Fig. 12.9

Rezolvare

Momentele încovoietoare produse de forța F sunt

$$M_{12} = -F \ell (1 - \cos \varphi), \quad M_{23} = -F 2 \ell.$$

Pentru determinarea componentei verticale a deplasării w_1 , se consideră bara din figura 12.9, *b*, încărcată cu o forță verticală egală cu l aplicată în secțiunea l . Momentele încovoietoare în cele două porțiuni sunt

$$m_{12} = -\ell(1 - \cos\varphi), \quad m_{23} = -2\ell.$$

Din relația (12.53) rezultă

$$w_1 = \frac{1}{EI_y} \int_0^\pi [-F\ell(1 - \cos\varphi)] [-\ell(1 - \cos\varphi)] \ell d\varphi + \frac{1}{EI_y} \int_0^{4\ell} (-2F\ell)(-2\ell) dx,$$

$$w_1 = \frac{F\ell^3}{EI_y} \int_0^\pi (\cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1) d\varphi + \frac{4F\ell^2}{EI_y} 4\ell = \frac{F\ell^3}{EI_y} \left(\frac{3\pi}{2} + 16 \right) \cong 20,7 \frac{F\ell^3}{EI_y}.$$

Pentru determinarea componentei orizontale a deplasării, h_1 , se consideră bara din figura 12.9, *c*, încărcată cu o forță orizontală egală cu l aplicată în secțiunea l . Momentele încovoietoare în cele două porțiuni sunt

$$m_{12} = \ell \sin\varphi, \quad m_{23} = -x.$$

Utilizând relația (12.54), se obține

$$h_1 = \frac{1}{EI_y} \int_0^\pi [-F\ell(1 - \cos\varphi)] \ell \sin\varphi \ell d\varphi + \frac{1}{EI_y} \int_0^{4\ell} (-2F\ell)(-x) dx = 14 \frac{F\ell^3}{EI_y}.$$

12.10.1 Regula lui Vereșceaghin

Pentru o porțiune dintr-o bară dreaptă solicitată la încovoiere, în figura 12.10 s-a reprezentat diagrama momentelor încovoietoare M , de formă oarecare, și diagrama m , care în cazul general are o variație liniară.

Rezolvarea *integralei lui Mohr*

$$\int M m dx \quad (12.56)$$

se poate face prin regula stabilită de A. N. Vereșceaghin (1925).

În secțiunea x , ordonata diagramei m este

$$m = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Elementul hașurat al diagramei M are aria

$$d\Omega = M dx.$$

Cu aceste notații, integrala (12.56) se poate scrie

$$\int M m dx = \int x \operatorname{tg} \alpha d\Omega = \operatorname{tg} \alpha \int x d\Omega = \operatorname{tg} \alpha \bar{x} \Omega = \eta \Omega. \quad (12.57)$$

Rezultă că integrala lui Mohr (12.56) se poate calcula înmulțind aria Ω a diagramei M cu ordonata η a diagramei m , din dreptul centrului de greutate al suprafeței diagramei M . Acest procedeu se numește regula lui Vereșceaghin.

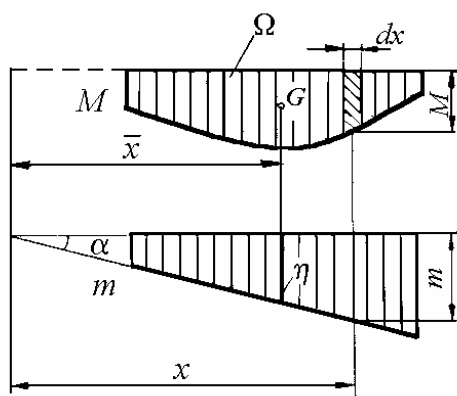


Fig. 12.10

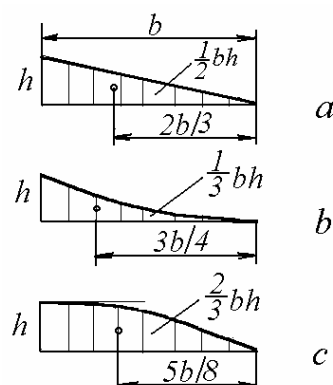


Fig. 12.11

De notat că regula lui Vereșceaghin se aplică numai la bare drepte, la care diagrama m este liniară. Dacă diagrama m are porțiuni cu înclinări diferite, relația (12.57) se aplică pe intervale cu pantă constantă. Dacă una din diagramele M sau m intersectează axa absciselor, atunci integrarea se poate face pe intervale determinate de punctul de intersecție.

Regula lui Vereșceaghin este ușor de aplicat atunci când diagrama M se poate împărți în suprafețe la care se calculează ușor suprafața și poziția centrului de greutate (fig. 12.11). La porțiunile de bară încărcate cu sarcină uniform distribuită, trebuie ca la unul din capetele intervalului forța tăietoare să fie zero. În acest caz, diagrama M este o parabolă cu pantă nulă la capătul respectiv (fig. 12.11, b, c).

Dacă forța tăietoare este diferită de zero la ambele capete ale intervalului, diagrama M este o parabolă care nu are pantă nulă cel puțin la o extremitate și relațiile din figura 12.11 nu sunt aplicabile. Se recomandă aplicarea principiului suprapunerii efectelor, deci separarea sarcinilor exterioare și construcția diagramei momentelor încovoietoare separat pentru fiecare sarcină, rezultând diagrame mai simple la care se pot calcula elementele din figura 12.11.

Dacă în urma aplicării unei metode energetice se obține o deformație negativă, rezultă că aceasta are loc în sens contrar forței sau cuplului unitate ce acționează în punctul respectiv.

Exemplul 12.8

Se cere să se calculeze panta liniei elastice în reazemul I și săgeata la mijlocul barei din figura 12.12, a prin metoda Mohr-Maxwell și regula de integrare a lui Vereșceaghin.

Rezolvare

În figura 12.12, b s-a construit diagrama M . Pentru calculul săgeții w_3 , se construiește sistemul din figura 12.12, c . Diagrama m' este dată în figura 12.12, d . Deoarece diagrama m' are pante diferite, calculul se face pe intervale cu pantă constantă

$$w_3 = \frac{2}{EI} \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{Fl}{2} \frac{l}{4} = \frac{Fl^3}{48EI}$$

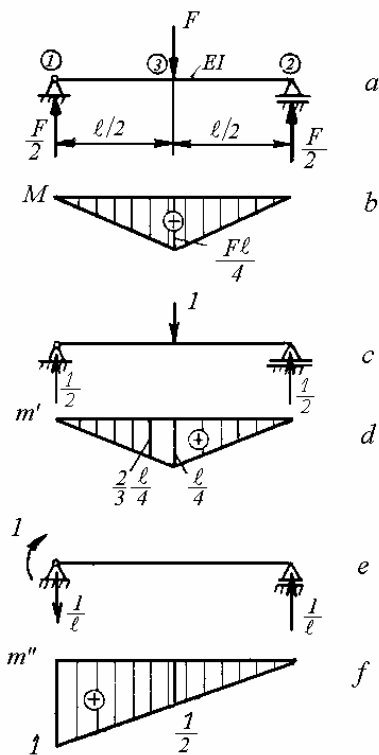


Fig. 12.12

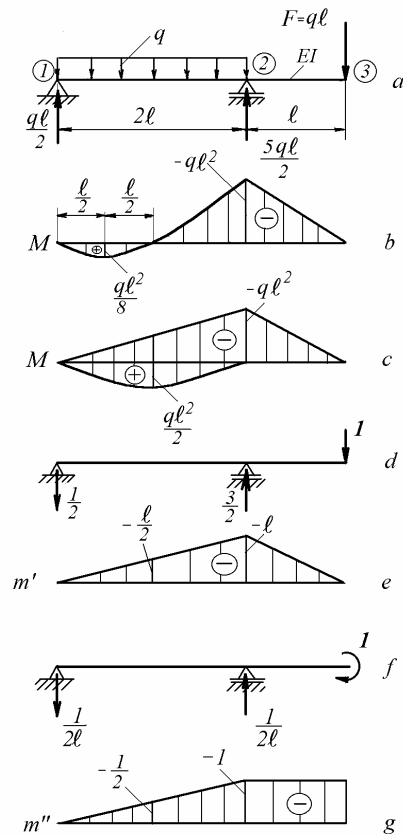


Fig. 12.13

Pentru calculul unghiului de rotire în reazemul 1 , se aplică un cuplu egal cu l pe reazemul barei din figura 12.12, e și se construiește diagrama m'' din figura 12.12, f . Aplicând regula lui Vereșceaghin se obține

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell \frac{F\ell}{4} \frac{1}{2} = \frac{F\ell^2}{16EI}.$$

Exemplul 12.9

Să se calculeze săgeata și unghiul de rotire în secțiunea 3 a barei din figura 12.13, a utilizând metoda Mohr-Maxwell și regula lui Vereșceaghin.

Rezolvare

Se determină reacțiunile și se construiește diagrama M (fig.12.13, b). Deoarece pe intervalul $1-2$ împărțirea în parabole cu pantă nulă la o extremitate este complicată, se construiesc diagramele parțiale din fig. 12.13, c , separat pentru sarcina distribuită și pentru forța concentrată. Pentru calculul săgeții în punctul 3, se aplică în acest punct o forță verticală egală cu l (fig. 12.13, d). Se calculează reacțiunile și se trasează diagrama m' (fig. 12.13, e). Săgeata este

$$w_3 = \frac{1}{EI} \frac{2}{3} 2\ell \frac{q\ell^2}{2} \left(-\frac{\ell}{2}\right) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 2\ell (-q\ell^2) \frac{2}{3} (-\ell) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell (-q\ell^2) \frac{2}{3} (-\ell) = \frac{2q\ell^4}{3EI}.$$

Pentru calculul unghiului de rotire al secțiunii 3, se încarcă bara în această secțiune cu un cuplu egal cu l (fig. 12.13, f). Se calculează reacțiunile și se trasează diagrama m'' (fig. 12.13, g). Unghiul de rotire este

$$\varphi_3 = \frac{1}{EI} \frac{2}{3} 2\ell \frac{q\ell^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 2\ell (-q\ell^2) \frac{2}{3} (-1) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell (-q\ell^2) (-1) = \frac{5q\ell^3}{6EI}.$$

Întrucât atât săgeata cât și unghiul de rotire sunt pozitive, deplasarea și rotirea vor avea loc în sensurile sarcinilor unitate aplicate.

Exemplul 12.10

Să se calculeze deplasările pe verticală și orizontală, precum și unghiul de rotire în secțiunea 2 a barei cotite din figura 12.14, a . Se cunoaște modulul de rigiditate la încovoiere EI .

Rezolvare

Se trasează diagrama M (fig. 12.14, b).

Pentru calculul deplasării pe verticală în punctul 2 se aplică în acest punct o forță verticală egală cu l (fig. 12.14, c) și se trasează diagrama m' (fig. 12.14, d).

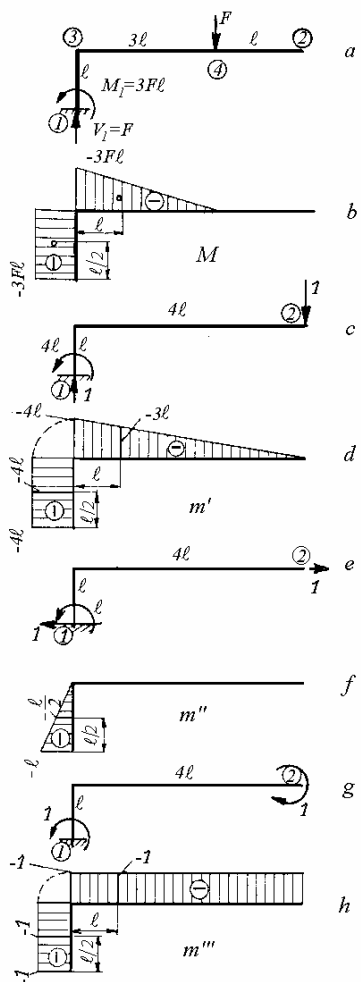


Fig. 12.14

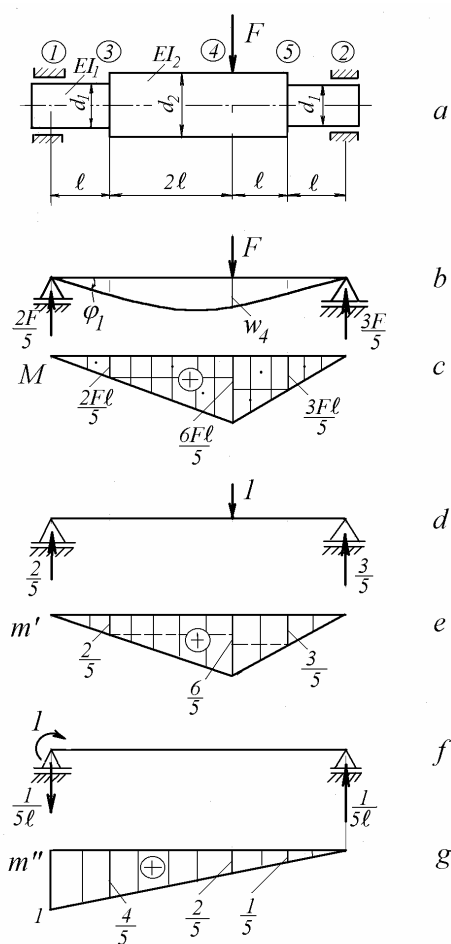


Fig. 12.15

Utilizând regula lui Vereșceaghin, rezultă deplasarea pe verticală

$$w_2 = \frac{1}{EI} \left[\ell(-3F\ell)(-4\ell) + \frac{1}{2} 3\ell(-3F\ell)(-3\ell) \right] = \frac{51F\ell^3}{2EI}.$$

Pentru calculul deplasării orizontale în 2, se aplică în acest punct o forță orizontală egală cu unitatea (fig. 12.14, e) și se trasează diagrama m'' (fig. 12.14, f). Rezultă

$$h_2 = \frac{1}{EI} \ell(-3F\ell) \left(-\frac{\ell}{2} \right) = \frac{3F\ell^3}{2EI}.$$

Pentru calculul unghiului de rotire al secțiunii 2, se aplică în această secțiune un cuplu egal cu unitatea (fig. 12.14, g) și se trasează diagrama m''' (fig. 12.14, h). Rezultă unghiul de rotire

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI} \left[\ell(-3F\ell)(-1) + \frac{1}{2}3\ell(-3F\ell)(-1) \right] = \frac{15F\ell^2}{2EI}.$$

Exemplul 12.11

Să se calculeze săgeata în punctul de aplicație al forței și unghiul de rotire în reazemul din stânga al barei în trepte din figura 12.15, a.

Rezolvare

Momentele de inerție axiale sunt $I_1 = \pi d_1^4/64$ și $I_2 = \pi d_2^4/64$.

Se calculează reacțiunile (fig. 12.15, b) și se trasează diagrama M (fig. 12.15, c). Se aplică o forță egală cu l în secțiunea 4 (fig. 12.15, d) și se construiește diagrama m' (fig. 12.15, e). Se calculează deplasarea verticală în secțiunea 4, utilizând regula lui Vereșceaghin pe patru intervale, determinate de saltul de diametru și saltul de pantă în diagrama m' :

$$w_4 = \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \ell \frac{2F\ell}{5} \frac{2}{3} \frac{2\ell}{5} + \frac{1}{2} \ell \frac{3F\ell}{5} \frac{2}{3} \frac{3\ell}{5} \right) +$$

$$+ \frac{1}{EI_2} \left[2\ell \frac{2F\ell}{5} \frac{4\ell}{5} + \frac{1}{2} 2\ell \frac{4F\ell}{5} \left(\frac{2\ell}{5} + \frac{2}{3} \frac{4\ell}{5} \right) + \ell \frac{3F\ell}{5} \frac{9}{2} \frac{\ell}{5} + \frac{1}{2} \ell \frac{3F\ell}{5} \left(\frac{3\ell}{5} + \frac{2}{3} \frac{3\ell}{5} \right) \right].$$

$$w_4 = \frac{13F\ell^3}{75EI_1} + \frac{167F\ell^3}{75EI_2}.$$

Se aplică un cuplu egal cu l în secțiunea 1 (fig. 12.15, f) și se construiește diagrama m'' (fig. 12.15, g). Se determină rotirea în secțiunea 1 cu regula lui Vereșceaghin, tot pe patru intervale, fiind mai ușor de calculat ariile din diagrama M , altfel fiind necesare doar trei intervale determinate de saltul de diametru:

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI_1} \left[\frac{1}{2} \ell \frac{2F\ell}{5} \left(\frac{4}{5} + \frac{11}{3} \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \ell \frac{3F\ell}{5} \frac{2}{3} \frac{1}{5} \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI_2} \left[2\ell \frac{2F\ell}{5} \frac{3}{5} + \frac{1}{2} 2\ell \frac{4F\ell}{5} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \frac{2}{5} \right) + \ell \frac{3F\ell}{5} \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \ell \frac{3F\ell}{5} \frac{5}{6} \frac{2}{5} \right].$$

$$\varphi_1 = \frac{16F\ell^2}{75EI_1} + \frac{89F\ell^2}{75EI_2}.$$

12.10.2 Formula lui Simpson

O altă metodă de calcul a integralei lui Mohr (12.56) pentru bare drepte se bazează pe formula stabilită de Newton, dar atribuită lui Thomas Simpson (1737).

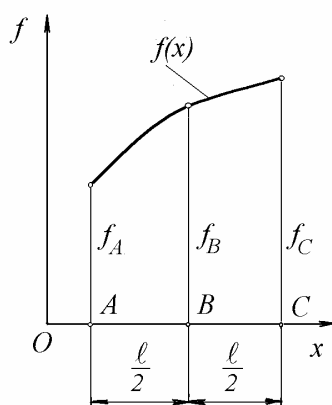


Fig. 12.16

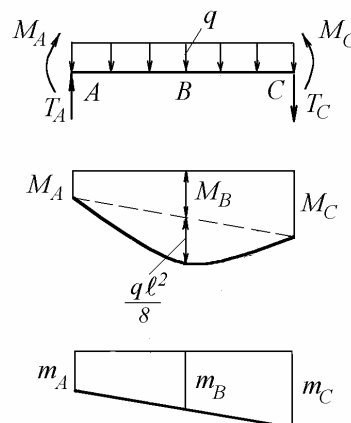


Fig. 12.17

Dacă intervalul de integrare, de lungime ℓ , se împarte în două subintervale egale (fig. 12.16) iar funcția $f(x) = M(x)m(x)$ este aproximată prin o parabolă care să treacă prin punctele de la capetele intervalului, de ordonate f_A , f_C , și de la mijlocul acestuia, de ordonată f_B , atunci aria suprafeței de sub curbă se poate calcula cu formula lui Simpson

$$\int_{\ell} f(x) dx = \frac{\ell}{6} (f_A + 4f_B + f_C). \quad (12.58)$$

Pentru porțiuni de bară încărcate cu o sarcină uniform distribuită $q = \text{const.}$ (fig. 12.17), momentul încovoietor $M(x)$ variază parabolic, momentul $m(x)$ variază în general liniar, deci funcția Mm este un polinom de gradul cel mult trei și integrarea este exactă. Dacă una din diagramele M sau m intersectează axa absciselor, atunci integrarea se face pe intervale determinate de punctul de intersecție.

Calculul deplasărilor cu metoda Mohr-Maxwell se face împărțind bara în porțiuni pe care funcția de integrat este diferită.

Se utilizează relația

$$\delta_j = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_i m_i}{(EI_y)_i} dx = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{6(EI_y)_i} (M_A m_A + 4M_B m_B + M_C m_C)_i. \quad (12.59)$$

Deoarece

$$M_B = \frac{M_A + M_C}{2} + \frac{q\ell^2}{8}, \quad m_B = \frac{m_A + m_C}{2}$$

relația de calcul a deplasărilor devine

$$\delta_j = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{6(EI_y)_i} \left[\left(M_A + M_C + \frac{q\ell^2}{4} \right) (m_A + m_C) + M_A m_A + M_C m_C \right]_i. \quad (12.60)$$

Pentru porțiuni de bară încărcate cu sarcină având o distribuție liniară sau mai complicată, formula (12.58) este aproximativă.

Exemplul 12.12

Să se calculeze deplasarea verticală a punctului 2 al barei din figura 12.18, *a*, prin metoda Mohr-Maxwell, utilizând regula lui Simpson și regula lui Vereșceaghin.

Rezolvare

Se trasează diagramele *T* (fig. 12.18, *b*) și *M* (fig. 12.18, *c*). În vederea aplicării regulii lui Vereșceaghin se construiesc diagramele *M* parțiale, separat pentru sarcina distribuită și pentru forța concentrată (fig. 12.18, *d*). Se aplică în punctul 2 o forță verticală egală cu *I* (fig. 12.18, *e*) și se trasează diagrama *m* (fig. 12.18, *f*). Aplicând formula (12.60) rezultă deplasarea pe verticală

$$w_2 = \frac{\ell}{6EI} \left[\left(-\frac{q\ell^2}{6} + \frac{q\ell^2}{4} \right) (-\ell) + \left(-\frac{q\ell^2}{6} \right) (-\ell) \right] = \frac{q\ell^4}{72EI}.$$

Aplicând regula lui Vereșceaghin separat pentru cele două diagrame parțiale din figura 12.18, *d* se obține

$$w_2 = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} \ell \left(-\frac{q\ell^2}{2} \right) \frac{3}{4} (-\ell) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell \frac{q\ell^2}{3} \frac{2}{3} (-\ell) = \frac{q\ell^4}{72EI}.$$

Exemplul 12.13

Să se calculeze deplasarea verticală a punctului 2 al barei din figura 12.19, *a*, prin metoda Mohr-Maxwell, utilizând regula lui Simpson și regula lui Vereșceaghin.

Rezolvare

Se trasează diagramele *T* (fig. 12.19, *b*) și *M* (fig. 12.19, *c*). Se aplică în punctul 2 o forță verticală egală cu *I* (fig. 12.19, *d*) și se trasează diagrama *m* (fig. 12.19, *e*). Aplicând formula (12.60) rezultă deplasarea pe verticală

$$w_2 = \frac{\ell}{6EI} \left[\left(-\frac{3q\ell^2}{2} + \frac{q\ell^2}{4} \right) (-\ell) + \left(-\frac{3q\ell^2}{2} \right) (-\ell) \right] = \frac{11q\ell^4}{24EI}.$$

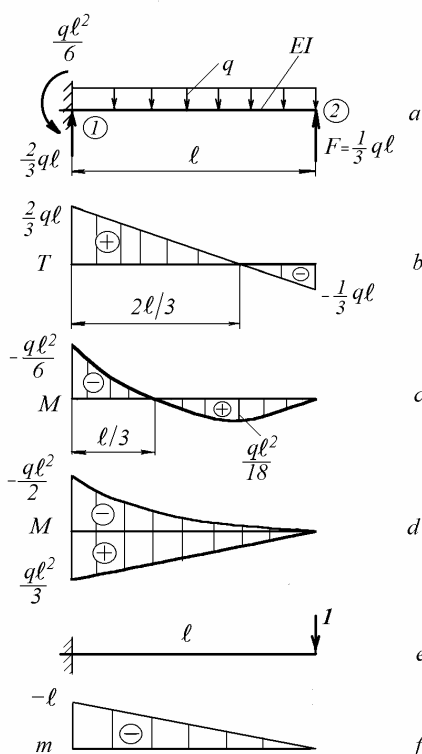


Fig. 12.18

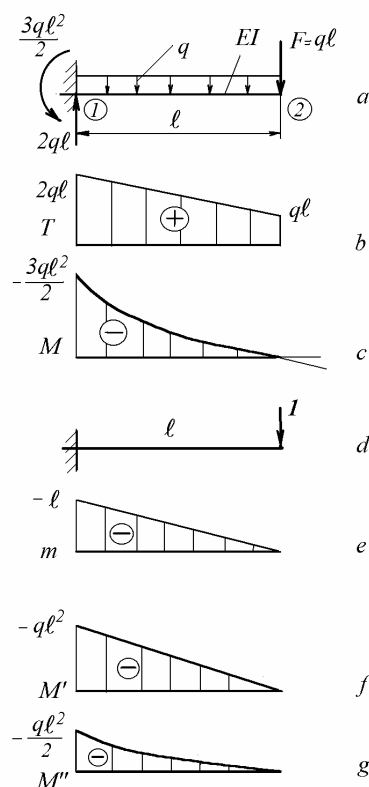


Fig. 12.19

Deoarece în secțiunea 2 forța tăietoare nu este zero, parabola din figura 12.19, *c* nu are pantă nulă în 2, deci relațiile din figura 12.11, *b* nu sunt aplicabile. Se construiesc diagramele de momente încovoietoare produse separat de forța concentrată (fig. 12.19, *f*) și de sarcina distribuită (fig. 12.19, *g*). Aplicând succesiv regula lui Vereșceaghin se obține

$$w_2 = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell \left(-ql^2 \right) \frac{2}{3} (-\ell) + \frac{1}{EI} \frac{1}{3} \ell \left(-\frac{ql^2}{2} \right) \frac{3}{4} (-\ell) = \frac{11q\ell^4}{24EI}.$$

Exemplul 12.14

Să se calculeze săgeata și unghiul de rotire în secțiunea 3 a barei din figura 12.13, *a* prin metoda Mohr-Maxwell și regula lui Simpson.

Rezolvare

Se utilizează diagrama M din figura 12.13, b și diagramele m' (fig. 12.13, e) și m'' (fig. 12.13, g). Săgeata este

$$w_3 = \frac{1}{EI} \frac{2\ell}{6} \left[\left(0 - q\ell^2 + \frac{q}{4} 4\ell^2 \right) (-\ell) + (-q\ell^2) (-\ell) \right] + \\ + \frac{1}{EI} \frac{\ell}{6} \left[(-q\ell^2) (-\ell) + (-q\ell^2) (-\ell) \right] = \frac{2q\ell^4}{3EI}.$$

Unghiul de rotire este

$$\varphi_3 = \frac{1}{EI} \frac{2\ell}{6} \left[\left(0 - q\ell^2 + \frac{q}{4} 4\ell^2 \right) (-1-1) + (-q\ell^2) (-1) \right] + \\ + \frac{1}{EI} \frac{\ell}{6} \left[(-q\ell^2) (-1-1) + (-q\ell^2) (-1) \right] = \frac{5q\ell^3}{6EI}.$$

12.10.3 Deformații în sisteme de bare articulate

În cazul barelor solificate la întindere-compresiune, deformațiile se pot calcula cu relația

$$\delta_j = \sum_i \int_{\ell} \frac{N_i n_i}{E_i A_i} dx, \quad (12.61)$$

unde N_i este forța axială în secțiunea x a sistemului sollicitat de forțele exterioare, n_i este forța axială în secțiunea x a sistemului cu aceeași rezemare, dar sollicitat de o singură forță egală cu 1 aplicată în punctul și pe direcția lui δ_j , iar $E_i A_i$ este modulul de rigiditate la întindere-compresiune al barei i .

Relația (12.61) se poate deduce direct, pe baza unui raționament analog cu cel folosit la demonstrarea teoremei lui Betti. Pentru simplitate se va renunța la indici pentru barele care compun sistemul.

Se aplică sistemului o forță egală cu unitatea, pe direcția deplasării căutate δ_j . Forța axială într-o secțiune dată este n . Energia potențială de deformație (5.5)

$$\text{este } \sum \int_{\ell} \frac{n^2 dx}{2EA}.$$

Se aplică apoi forțele exterioare. Forța axială datorită acestora este N . Energia de deformație corespunzătoare este $\sum \int_{\ell} \frac{N^2 dx}{2EA}$. La aceasta se adaugă

lucrul mecanic efectuat de forța 1 pe deplasarea δ_j produsă de forțele exterioare. Energia de deformație finală totală

$$\sum_{\ell} \int \frac{n^2 dx}{2EA} + \sum_{\ell} \int \frac{N^2 dx}{2EA} + 1 \cdot \delta_j \quad (12.62)$$

este egală cu energia de deformație acumulată în cazul aplicării simultane a forței unitate și a sarcinilor exterioare, când forța axială este $(N+n)$

$$\sum_{\ell} \int \frac{(N+n)^2 dx}{2EA}. \quad (12.63)$$

Egalând expresiile (12.62) și (12.63), rezultă

$$\delta_j = \sum_{\ell} \int \frac{Nn}{EA} dx. \quad (12.64)$$

La grinzile cu zăbrele, forțele axiale și modulele de rigiditate sunt constante pe lungimea barelor, deci relația (12.64) devine

$$\delta_j = \sum_i \frac{N_i n_i \ell_i}{E_i A_i}.$$

Exemplul 12.15

Să se calculeze deplasarea punctului 3 al sistemului de bare articulate la capete din figura 12.20, a , la care pentru toate barele $EA = \text{const}$.

Rezolvare

Se calculează întâi reacțiunile, apoi, utilizând metoda izolării nodurilor, se determină eforturile în bare. Ținând seama de convenția de semne din Rezistența materialelor

$$N_{32} = -\frac{F}{\sin\alpha}, \quad N_{31} = \frac{F}{\text{tg}\alpha}, \quad N_{21} = F.$$

Pentru calculul componentei verticale a deplasării, w_3 , se aplică o forță verticală egală cu unitatea în punctul 3 și se determină eforturile în bare. Înlocuind $F=1$ în expresiile de mai sus, se obține

$$n_{32} = -\frac{1}{\sin\alpha}, \quad n_{31} = \frac{1}{\text{tg}\alpha}, \quad n_{21} = 1.$$

Relația (12.61) devine

$$w_3 = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^3 \int N_i n_i dx = \frac{1}{EA} (N_{13} n_{13} \ell_{13} + N_{32} n_{32} \ell_{32} + N_{21} n_{21} \ell_{21}) =$$

$$= \frac{1}{EA} \left(\frac{F}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \ell \cos \alpha + \frac{F}{\sin^2 \alpha} \ell + F \ell \sin \alpha \right) = \frac{F \ell \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha + 1}{EA \sin^2 \alpha}.$$

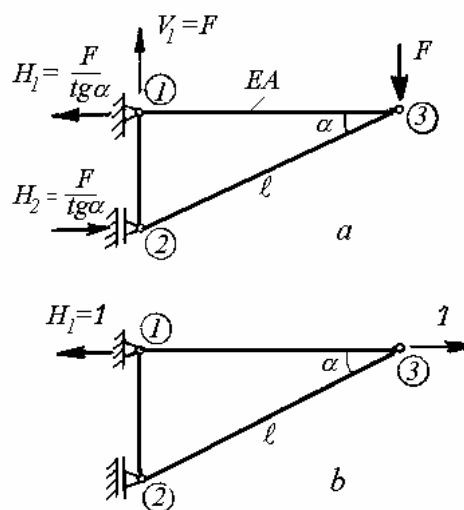


Fig. 12.20

Pentru calculul componentei orizontale a deplasării, h_3 , se aplică o forță orizontală egală cu unitatea în punctul 3 (fig. 12.20, b) și se calculează eforturile în bare:

$$n_{32} = n_{21} = 0, \quad n_{13} = 1.$$

Rezultă

$$h_3 = \frac{N_{13} n_{13} \ell \cos \alpha}{EA} = \frac{1}{EA} \frac{F}{\operatorname{tg} \alpha} 1 \cdot \ell \cos \alpha = \frac{F \ell \cos^2 \alpha}{EA \sin \alpha}.$$

Deplasarea totală va fi

$$u_3 = \sqrt{w_3^2 + h_3^2}.$$

12.11 Sisteme static nedeterminate

Sistemele static nedeterminate (denumite și sisteme hiperstatice) studiate în Rezistența materialelor sunt sisteme elastice la care nu se pot determina toate eforturile cu ajutorul ecuațiilor de echilibru ale Staticii.

Atunci când numărul reacțiunilor necunoscute, datorite legăturilor, este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru static, sistemul este static nedeterminat *exterior*. Gradul de nedeterminare este egal cu diferența între numărul necunoscutelor și numărul ecuațiilor de echilibru.

Atunci când sistemul de bare conține contururi închise, nu se pot determina eforturile interioare, sistemul fiind static nedeterminat *interior*. Un contur plan închis, solicitat de forțe coplanare, este triplu static nedeterminat.

În continuare se vor considera numai sisteme de bare plane, solicitate de forțe coplanare, la care gradul de nedeterminare n este dat de relația

$$n = r + 3c - e,$$

unde r este numărul reacțiunilor exterioare, c - numărul conturilor închise, iar $e=3$ este numărul ecuațiilor de echilibru din statică.

12.11.1 Metoda eforturilor

Se consideră un sistem static nedeterminat exterior.

Înlocuind legăturile cu reacțiuni, în afara forțelor exterioare, asupra sistemului vor acționa r reacțiuni, pentru calculul cărora se dispune de trei ecuații de echilibru. Pentru rezolvarea problemei, sunt necesare încă $(r-3)$ ecuații, reprezentând condiții de deformație.

Se utilizează *metoda eforturilor*, exprimând deformațiile în funcție de eforturi. Se transformă sistemul static nedeterminat (s.s.n.) într-un sistem static determinat (s.s.d.) echivalent, prin suprimarea unui număr corespunzător de legături, care se înlocuiesc cu $(r-3)$ forțe (sau momente) exterioare numite *necunoscute static nedeterminate (reacțiuni hiperstatice)* care se vor nota distinct cu X_j ($j=1, \dots, r-3$).

Se scriu condițiile de echivalență între s.s.d. echivalent și s.s.n. Acestea sunt condiții de deformație în punctele și pe direcțiile necunoscutelor static nedeterminate, în care deformațiile se exprimă în funcție de eforturi. Se rezolvă sistemul format din ecuațiile provenite din condițiile de deformație, din care se obțin necunoscutele static nedeterminate, apoi din ecuațiile de echilibru se determină restul reacțiunilor sau eforturilor care acționează în sistemul static

determinat echivalent. Astfel, problema se reduce la studiul sistemului static determinat echivalent.

De menționat că la sisteme static nedeterminate compuse din bare de diferite secțiuni, în general, se face un calcul de verificare a tensiunilor din bare, deoarece la scrierea condițiilor de deformație trebuie cunoscute modulele de rigiditate ale barelor componente. La sisteme formate din o singură bară de secțiune constantă, din o bară în trepte cu rapoarte date între dimensiunile transversale ale diferitelor tronsoane sau din bare cu același modul de rigiditate se poate face și un calcul de dimensionare.

12.11.2 Teorema lui Menabrea

Condițiile de echivalență între sistemul static nedeterminat dat și sistemul static determinat echivalent, se pot scrie utilizând a doua teoremă a lui Castigliano (12.47).

La sisteme static nedeterminate exterior, cu reazeme rigide fixe, deplasările pe direcțiile necunoscutele static nedeterminate sunt nule, deci condițiile de deformație se scriu sub forma

$$u_j = \frac{\partial U}{\partial X_j} = 0. \quad (12.65)$$

Relația (12.65) exprimă analitic teorema lui L. F. Menabrea (1857): *valorile reacțiilor hiperstatice corespund unui minim al energiei potențiale de deformație.*

Într-adevăr, relația (12.65) indică o condiție de extrem a energiei de deformație. Se demonstrează că acesta este un minimum dacă echilibrul este stabil. În acest sens, teorema lui Menabrea corespunde *principiului acțiunii minime.*

În cazul barelor solicitate la încovoiere, relația (12.65) devine

$$\int_{\ell} \frac{M}{EI_y} \frac{\partial M}{\partial X_j} dx = 0, \quad (12.66)$$

iar în cazul barelor cotite și al cadrelor, aceasta se extinde pe toate barele componente

$$\sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_i}{E_i I_{y_i}} \frac{\partial M_i}{\partial X_j} dx = 0. \quad (12.67)$$

Teorema lui Menabrea se aplică și sistemelor static nedeterminate interior: *valorile eforturilor static nedeterminate, care acționează în barele unui sistem în echilibru stabil, corespund unui minim al energiei potențiale de deformație.*

Exemplul 12.16

Se cere să se traseze diagrama momentelor încovoietoare la bara din figura 12.21, *a*.

Rezolvare

Înlocuind legăturile cu reacțiuni (fig. 12.21, *a*), se pun în evidență patru reacțiuni, pentru calculul cărora se dispune de numai trei ecuații de echilibru. Sistemul este simplu static nedeterminat. Se alege V_2 drept necunoscută static nedeterminată și se notează X_1 . Se desființează reazemul simplu din punctul 2 și se construiește sistemul static determinat echivalent (fig. 12.21, *b*). Forța exterioară X_1 acționează în capătul liber din punctul 2.

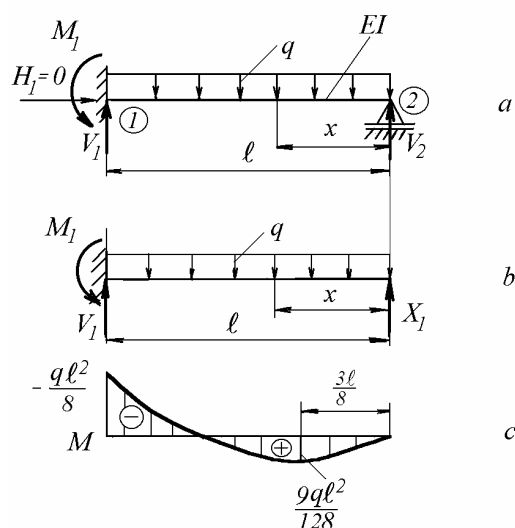


Fig. 12.21

Condiția de echivalență între s.s.d. (fig. 12.21, *b*) și s.s.n. (fig. 12.21, *a*) este

$$w_2 = 0,$$

deci, deși sistemul static determinat din figura 12.21, *b* are capăt liber în 2, se caută acea valoare a forței X_1 care, acționând asupra barei împreună cu sarcina distribuită q , face ca săgeata în punctul 2 să fie nulă (ca și cum ar exista un reazem simplu).

Conform relației (12.66), pentru bara de secțiune constantă, condiția de deformație se scrie

$$\int_0^{\ell} M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx = 0.$$

În secțiunea x , momentul încovoiator este

$$M(x) = X_1 x - \frac{q x^2}{2},$$

iar derivata în raport cu forța X_1 este

$$\frac{\partial M}{\partial X_1} = x.$$

Condiția de deformație devine

$$\int_0^{\ell} \left(X_1 x - \frac{q x^2}{2} \right) x dx = 0,$$

de unde rezultă

$$X_1 = \frac{3q\ell}{8}.$$

Din ecuațiile de echilibru se calculează apoi

$$V_1 = \frac{5q\ell}{8}, \quad M_1 = \frac{q\ell^2}{8},$$

astfel că se poate construi diagrama momentelor încovoiatoare (fig. 12.21, *c*), pe baza căreia se face dimensionarea.

12.11.3 Ecuațiile canonice ale metodei eforturilor

Se consideră sistemul static nedeterminat din figura 12.22, *a*, la care se pune problema determinării reacțiunilor. Sistemul este dublu static nedeterminat. Se construiește sistemul static determinat echivalent (fig. 12.22, *b*) la care necunoscutele static nedeterminate s-au notat cu X_1 , respectiv X_2 .

Se formează apoi încă trei sisteme, având aceeași rezemare ca sistemul static determinat, însă solicitate diferit:

a) sistemul 0 (numit și *sistem de bază*), solicitat numai de forțele exterioare aplicate inițial asupra s.s.n. (fig. 12.22, *c*);

b) sistemul 1, solicitat de o forță egală cu I , aplicată în punctul și pe direcția lui X_1 (fig. 12.22, *d*);

c) sistemul 2, solicitat de o forță egală cu I , aplicată în punctul și pe direcția lui X_2 (fig. 12.22, *e*);

Condițiile de echivalență între s.s.d. (fig. 12.22, *b*) și s.s.d. echivalent (fig. 12.22, *a*) se scriu

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad (12.68)$$

deci s.s.d. trebuie să aibă săgeți nule în punctele 1 și 2, care în s.s.n. corespund secțiunilor din dreptul reazemelor.

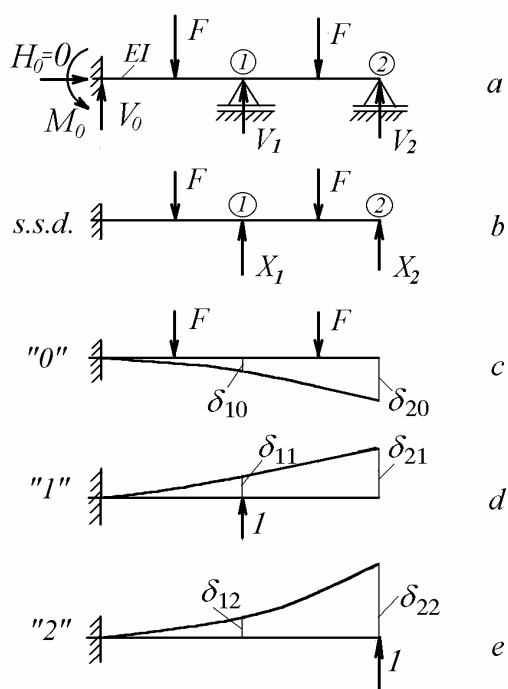


Fig. 12.22

Utilizând conceptul de coeficient de influență (v. par. 12.3), în figurile 12.22, *c*, *d*, *e* s-au notat deplasările în secțiunile 1 și 2. Astfel, δ_{21} reprezintă deplasarea în punctul 2 produsă de o forță egală cu unitatea aplicată în secțiunea 1. Generalizând, δ_{21} reprezintă deplasarea în sistemul 1, măsurată în punctul și pe direcția necunoscutei static nedeterminate X_2 . Analog, δ_{10} este deplasarea în sistemul 0, în punctul de aplicație și pe direcția de acțiune a lui X_1 etc.

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, relațiile (12.68) se scriu

$$\begin{aligned}\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= 0, \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} &= 0,\end{aligned}\quad (12.69)$$

de unde rezultă necunoscutele static nedeterminate X_1 și X_2 .

Relațiile (12.69) reprezintă *ecuațiile canonice ale metodei eforturilor* și pot fi generalizate la sisteme cu un grad mai mare de nedeterminare.

Dacă se notează M^0 , m_1 și m_2 momentele încovoietoare într-o secțiune oarecare a sistemelor 0, 1, respectiv 2 (neapărat aceeași secțiune), atunci coeficienții din ecuațiile (12.69) se pot calcula cu metoda Mohr-Maxwell astfel

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \int_{\ell} \frac{m_1^2}{EI} dx, & \delta_{12} = \delta_{21} &= \int_{\ell} \frac{m_1 m_2}{EI} dx, & \delta_{22} &= \int_{\ell} \frac{m_2^2}{EI} dx, \\ \delta_{10} &= \int_{\ell} \frac{M^0 m_1}{EI} dx, & \delta_{20} &= \int_{\ell} \frac{M^0 m_2}{EI} dx.\end{aligned}\quad (12.70)$$

La același rezultat se poate ajunge și pe baza teoremei lui Menabrea.

Într-o secțiune oarecare a unui sistem static nedeterminat, momentul încovoietor se poate scrie sub forma

$$M = m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + M^0, \quad (12.71)$$

unde primii termeni din membrul drept arată contribuția eforturilor static nedeterminate X_j , iar ultimul termen arată contribuția celorlalte sarcini aplicate sistemului.

Conform teoremei lui Menabrea, în cazul particular al încovoierii

$$\int_0^{\ell} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_j} dx = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12.72)$$

Notând derivata $\frac{\partial M}{\partial X_j} = m_j$ și făcând înlocuirile în relațiile (12.72), se

obține

$$\int_0^{\ell} \frac{1}{EI} \left(M^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots \right) m_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (12.73)$$

care cu notațiile

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int_{\ell} \frac{m_i m_j}{EI} dx, \quad \delta_{j0} = \int_{\ell} \frac{M^0 m_j}{EI} dx, \quad (12.74)$$

se transformă în ecuațiile canonice

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n &= -\delta_{10}, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n &= -\delta_{20}, \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n &= -\delta_{n0}. \end{aligned} \quad (12.75)$$

Exemplul 12.17

Se cere să se traseze diagrama momentelor încovoietoare la bara cotită din figura 12.23, a.

Rezolvare

Se înlocuiesc legăturile prin reacțiuni. Sistemul este dublu static nedeterminat. Se aleg reacțiunile H_1 și V_1 ca necunoscute static nedeterminate. Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 12.23, b), transformând articulația 1 în capăt liber, deci anulând legăturile corespunzătoare reacțiunilor static nedeterminate, care devin forțele exterioare X_1 și X_2 .

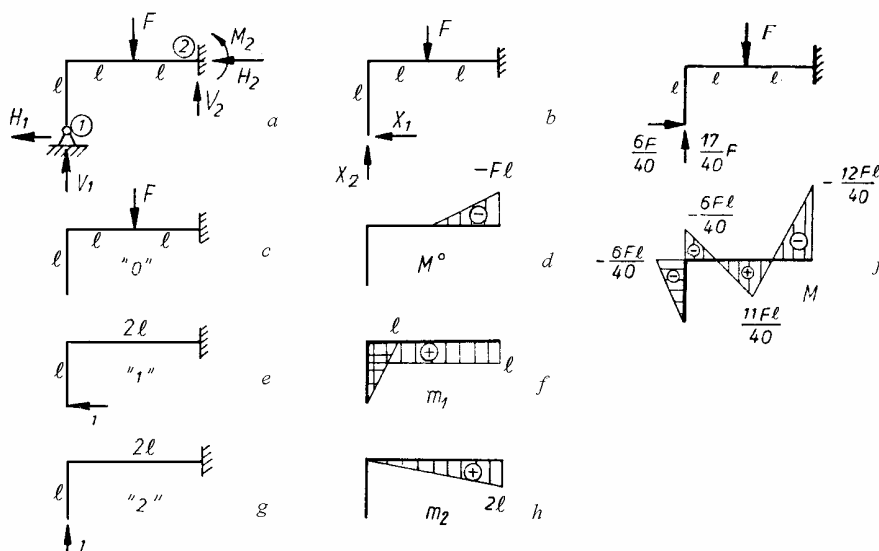


Fig. 12.23

Se construiește sistemul 0 (fig. 12.23, c) și diagrama momentelor încovoietoare M^0 (fig. 12.23, d), apoi sistemul 1 (fig. 12.23, e) și diagrama momentelor încovoietoare m_1 (fig. 12.23, f), și sistemul 2 (fig. 12.23, g) și diagrama m_2 (fig. 12.23, h).

Se calculează coeficienții (12.74), utilizând regula lui Vereșceaghin

$$\begin{aligned}\delta_{10} &= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} (-F\ell) \ell \cdot \ell = -\frac{F\ell^3}{2EI}, \\ \delta_{20} &= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} (-F\ell) \ell \cdot \frac{5}{6} 2\ell = -\frac{5F\ell^3}{6EI}, \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left(2\ell \cdot \ell \cdot \ell + \frac{1}{2} \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell \right) = \frac{7\ell^3}{3EI}, \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 2\ell \cdot 2\ell \cdot \frac{2}{3} 2\ell = \frac{8\ell^3}{3EI}, \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{1}{EI} 2\ell \cdot \ell \cdot \ell = \frac{2\ell^3}{EI}.\end{aligned}$$

După înlocuire în ecuațiile (12.75) sau (12.69) și simplificări, se obține sistemul algebric liniar

$$\begin{aligned}\frac{7}{3} X_1 + 2 X_2 &= \frac{F}{2}, \\ 2 X_1 + \frac{8}{3} X_2 &= \frac{5F}{6},\end{aligned}$$

cu soluțiile

$$X_1 = -\frac{6F}{40}, \quad \text{și} \quad X_2 = \frac{17F}{40}.$$

Semnul minus arată că forța X_1 are sens contrar celui indicat în figura 12.23, b. Rezultă că sistemul static determinat echivalent are configurația din figura 12.23, i iar diagrama momentelor încovoietoare este cea redată în figura 12.23, j.

Exemplul 12.18

Se cere să se traseze diagrama momentelor încovoietoare la bara dublu încastrată, de secțiune constantă, din figura 12.24, a.

Rezolvare

Se înlocuiesc încastrările cu reacțiuni. Forțele orizontale sunt nule. Rămân patru reacțiuni necunoscute și numai două ecuații de echilibru, deci sistemul este dublu static nedeterminat.

Se aleg momentele M_1 și M_2 drept necunoscute static nedeterminate. Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 12.24, b), transformând încastrările în reazeme simple, deci anulând legăturile corespunzătoare reacțiilor static nedeterminate, care devin momentele exterioare X_1 și X_2 .

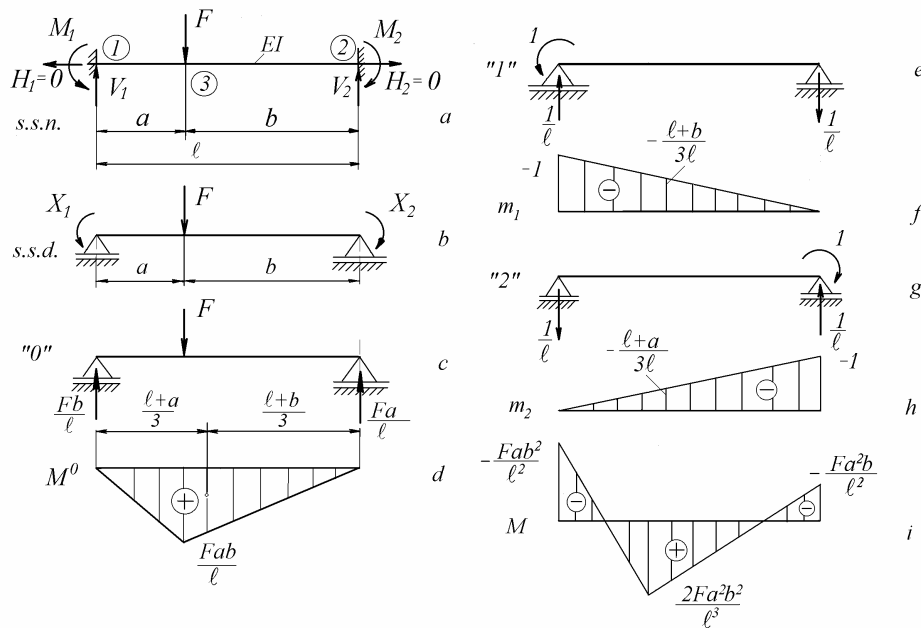


Fig. 12.24

Se construiește sistemul 0 (fig. 12.24, c) și diagrama momentelor încovoietoare M^0 (fig. 12.24, d), apoi sistemul 1 (fig. 12.24, e) și diagrama momentelor încovoietoare m_1 (fig. 12.24, f), și sistemul 2 (fig. 12.24, g) și diagrama m_2 (fig. 12.24, h).

Se calculează coeficienții (12.74), utilizând regula lui Vereșceaghin

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell \frac{Fab}{\ell} \left(-\frac{\ell+b}{3\ell} \right) = -\frac{Fab(\ell+b)}{6\ell EI},$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell \frac{Fab}{\ell} \left(-\frac{\ell+a}{3\ell} \right) = -\frac{Fab(\ell+a)}{6\ell EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell (-1) \frac{2}{3} (-1) = \frac{\ell}{3EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{\ell}{3EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell (-1) \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{\ell}{6EI}.$$

După înlocuire în ecuațiile (12.75), se obține sistemul algebric liniar

$$\frac{\ell}{3} X_1 + \frac{\ell}{6} X_2 = \frac{F a b (\ell + b)}{6\ell},$$

$$\frac{\ell}{6} X_1 + \frac{\ell}{3} X_2 = \frac{F a b (\ell + a)}{6\ell},$$

cu soluțiile

$$X_1 = \frac{F a b^2}{\ell^2} \quad \text{și} \quad X_2 = \frac{F a^2 b}{\ell^2}.$$

Aplicând aceste momente în sistemul static determinat echivalent se obține diagrama momentelor încovoietoare din figura 12.24, *i*.

Exemplul 12.19

Se cere să se calculeze reacțiunile și să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la bara din figura 12.25, *a* considerând sistemul static nedeterminat interior.

Rezolvare

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, bara din figura 12.25, *a* poate fi descompusă în două sisteme simplu static nedeterminate, unul încărcat simetric și altul încărcat antisimetric, ca în fig. 12.25, *b* și *c*, care se rezolvă ca sisteme static nedeterminate interior, prin secționare în planul central. Forțele axiale sunt nule.

La bara din figura 12.25, *b*, geometric simetrică și încărcată simetric, în planul de simetrie forța tăietoare este nulă, deci acționează doar un moment încovoietor care se alege ca necunoscută static nedeterminată (fig. 12.25, *d*).

La bara din figura 12.25, *c*, geometric simetrică și încărcată antisimetric, în planul de simetrie momentul încovoietor este nul, deci acționează doar o forță tăietoare care se alege ca necunoscută static nedeterminată (fig. 12.25, *e*).

Pentru fiecare jumătate de bară se construiesc sistemele *0* și *1*, diagramele M^0 și m_1 (fig. 12.25, *f*,...*m*), se calculează coeficienții ecuației canonice și se determină necunoscuta static nedeterminată care se înlocuiește în s.s.d. echivalent, și se construiește diagrama momentelor încovoietoare.

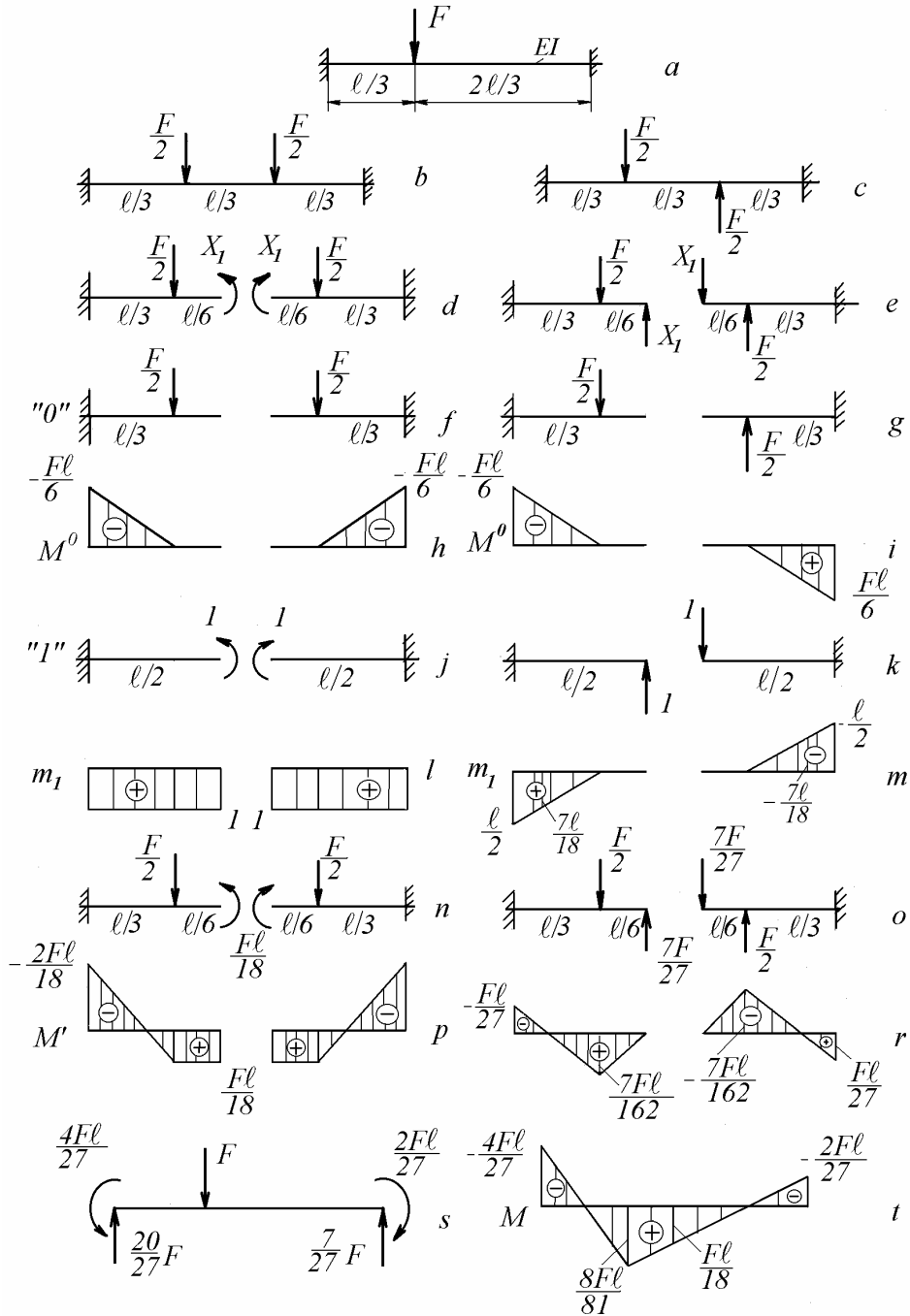


Fig. 12.25

Pentru bara din figura 12.25, *d* se obține

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{\ell}{3} \left(-\frac{F\ell}{6} \right) \cdot 1 = -\frac{F\ell^2}{36EI}, \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{\ell}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\ell}{2EI},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{F\ell}{18},$$

deci s.s.d. echivalent are încărcarea din figura 12.25, *n* și diagrama momentelor încovoietoare din figura 12.25, *p*.

Pentru bara din figura 12.25, *e* se obține

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{\ell}{3} \left(-\frac{F\ell}{6} \right) \cdot \frac{7\ell}{18} = -\frac{7F\ell^3}{648EI}, \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2\ell}{3} = \frac{\ell^3}{24EI},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{7F}{27},$$

deci s.s.d. echivalent are încărcarea din figura 12.25, *o* și diagrama momentelor încovoietoare din figura 12.25, *r*.

Se însumează reacțiunile (fig. 12.25, *s*) și cele două diagrame parțiale, rezultând diagrama momentelor încovoietoare pentru s.s.n. dat (fig. 12.25, *t*).

Exemplul 12.20

Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la bara din figura 12.26, *a* considerând sistemul static nedeterminat exterior, prin descompunere într-un sistem încărcat simetric și unul încărcat antisimetric.

Rezolvare

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, bara din figura 12.26, *a* poate fi descompusă în două sisteme simplu static nedeterminate, unul încărcat simetric și altul încărcat antisimetric, ca în fig. 12.26, *b* și *c*, la care forțele axiale sunt nule.

La bara încărcată simetric din figura 12.26, *b*, în încastrări momentele încovoietoare sunt egale și de sens contrar, deci reacțiunile verticale se pot calcula. Se construiește s.s.d. echivalent în care încastrările se transformă în reazeme simple iar momentele din încastrări se aleg drept necunoscute static nedeterminate (fig. 12.25, *d*).

La bara încărcată antisimetric din figura 12.26, *c*, în încastrări momentele încovoietoare sunt egale și de același sens. Se construiește s.s.d. echivalent în care încastrările se transformă în reazeme simple iar momentele din încastrări se aleg drept necunoscute static nedeterminate (fig. 12.26, *e*).

Se construiesc sistemele *0* și *I*, diagramele M^0 și m_1 (fig. 12.26, *f*,...*m*), se calculează coeficienții ecuației canonice și se determină necunoscuta static

nedeterminată care se înlocuiește în s.s.d. echivalent. și se construiește diagrama momentelor încovoietoare pentru fiecare din cele două subsisteme.

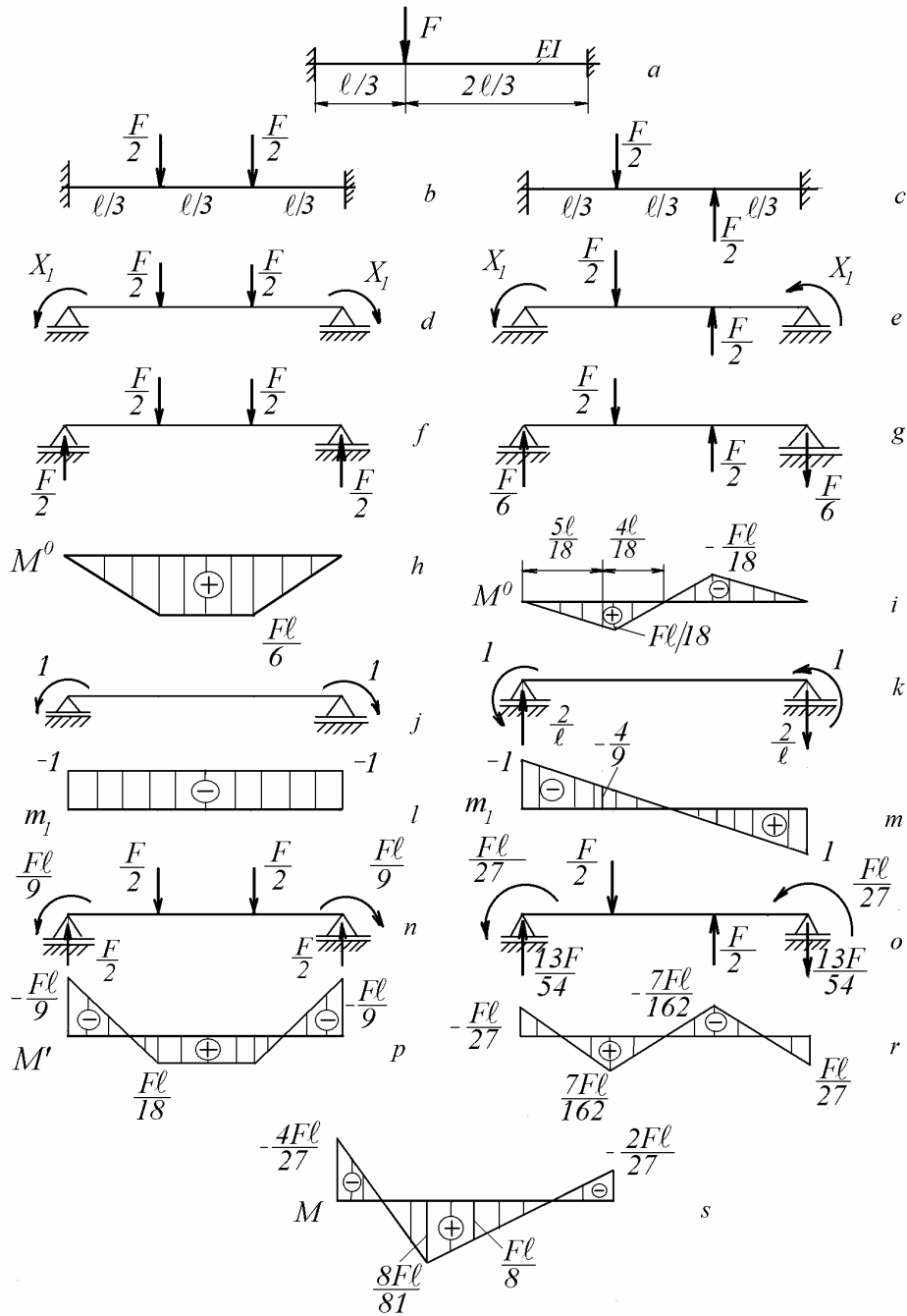


Fig. 12.26

Pentru bara din figura 12.26, *d* se obține

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{\ell}{3} \right) \frac{F\ell}{6} (-1) = -\frac{F\ell^2}{9EI}, \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} \ell \cdot (-1) \cdot (-1) = \frac{\ell}{EI},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{F\ell}{9},$$

deci s.s.d. echivalent are încărcarea din figura 12.26, *n* și diagrama momentelor încovoietoare din figura 12.26, *p*.

Pentru bara din figura 12.26, *e* se obține

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{\ell}{2} \frac{F\ell}{18} \left(-\frac{4}{9} \right) \cdot 2 = -\frac{F\ell^2}{81EI}, \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{\ell}{2} (-1) \cdot \frac{2}{3} (-1) = \frac{\ell}{3EI},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{F\ell}{27},$$

deci s.s.d. echivalent are încărcarea din figura 12.26, *o* și diagrama momentelor încovoietoare din figura 12.26, *r*.

Dacă se însumează cele două diagrame parțiale se obține diagrama momentelor încovoietoare a sistemului dat (fig. 12.26, *s*).

Exemplul 12.21

Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la bara inelară din figura 12.27, *a* și să se calculeze deformația diametrală pe direcția de acțiune a forțelor. O astfel de bară constituie elementul deformabil la unele dispozitive utilizate la etalonarea mașinilor pentru încercări la tracțiune.

Rezolvare

Bara este un s.s.n. interior. Secționând bara în punctele 1 și 2, în fiecare secțiune se introduc trei eforturi (fig. 12.27, *b*), deci aparent sistemul este triplu static nedeterminat. Datorită simetriei față de diametrul vertical, forțele tăietoare sunt $F/2$. Datorită simetriei față de diametrul orizontal, forțele axiale ar trebui să fie egale și de același semn, dar neexistând forțe exterioare orizontale acestea sunt nule, iar momentele M_1 și M_2 sunt egale și de sens contrar, deci ambele se aleg ca necunoscute static nedeterminate. Fiind egale, sistemul este simplu static nedeterminat. Jumătatea din dreapta a s.s.d. echivalent este liberă la capete și acționată de forțele $F/2$ și momentele X_1 (fig. 12.27, *c*).

În sistemul 0, acționat doar de forțele $F/2$, momentul încovoietor este $M^0 = -0,5FR \sin \varphi$, iar în sistemul 1, acționat de cupluri egale cu l aplicate în locul momentelor X_1 , momentul încovoietor este $m_1 = 1$.

Rezultă

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} M^0 m_1 R d\varphi = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} \left(-\frac{FR}{2} \sin\varphi \right) \cdot 1 \cdot R d\varphi = -\frac{FR^2}{EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} m_1^2 R d\varphi = \frac{\pi R}{EI},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{FR}{\pi}.$$

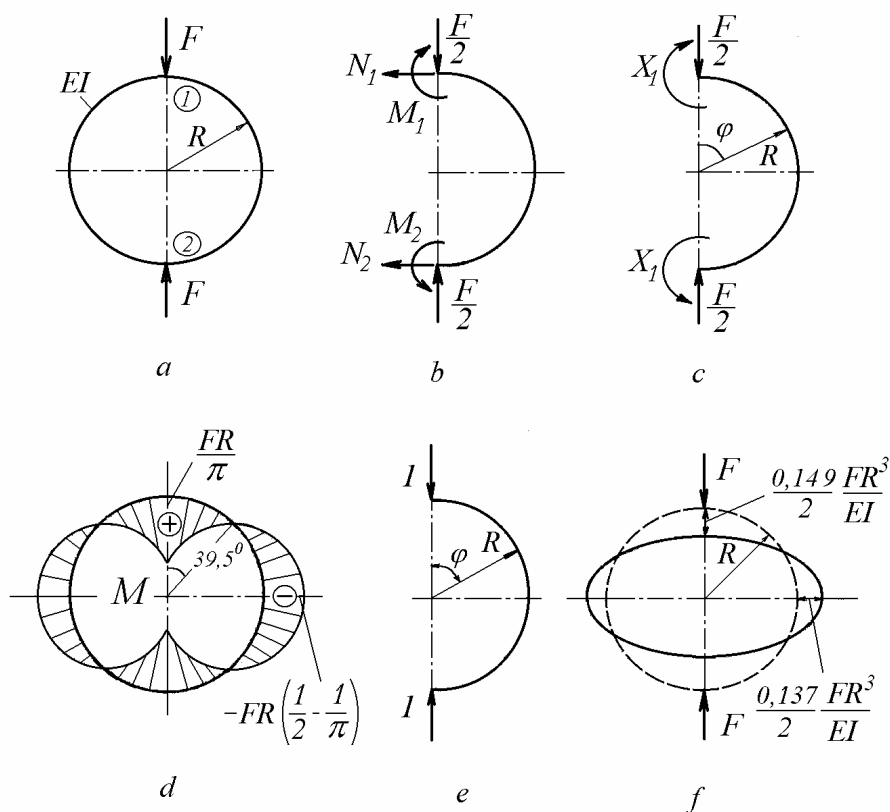


Fig. 12.27

Într-o secțiune oarecare, momentul încovoietor este

$$M = \frac{FR}{\pi} - \frac{FR}{2} \sin\varphi.$$

Diagrama momentelor încovoietoare este prezentată în figura 12.27, *d*.

Calculul deformațiilor s. s. n. se face utilizând s. s. d. echivalent. Pentru calculul deplasării relative a punctelor 1 și 2, se consideră semi-inelul din fig. 12.27, *e*, liber la capete ca și s. s. d. echivalent și solicitat de forțe egale cu l pe direcția deformației. În acest sistem, momentul încovoietor este $m = -R \sin \varphi$, deci

$$\Delta_{12} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} M m R d\varphi = -\frac{FR^3}{EI} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \sin \varphi d\varphi = \frac{FR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right),$$

$$\Delta_{12} = 0,149 \frac{FR^3}{EI}.$$

În figura 12.27, *f* se prezintă deformată statică a inelului.

Exemplul 12.22

Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la bara cotită dublu articulată din figura 12.28, *a*.

Rezolvare

În cele două articulații acționează patru reacțiuni. Sistemul este simplu static nedeterminat. Reacțiunile V_1 și V_2 pot fi determinate din ecuațiile de echilibru, deci nu pot fi alese ca necunoscute static nedeterminate. Din ecuația de momente față de reazemul 1 se obține $V_2 = F$, apoi din ecuația de proiecții a forțelor pe verticală se obține $V_1 = F$. Rămâne ecuația de proiecții a forțelor pe orizontală $H_1 + H_2 = F$, în care apar două necunoscute.

Se alege reacțiunea orizontală H_2 drept necunoscută static nedeterminată și se notează X_1 . Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 12.28, *b*), înlocuind articulația din 2 cu un reazem simplu, deci anulând legătura corespunzătoare lui X_1 , care devine forță exterioară.

Se construiește sistemul 0 (fig. 12.28, *c*) și diagrama momentelor încovoietoare M^0 (fig. 12.28, *d*), apoi sistemul 1 (fig. 12.28, *e*) și diagrama momentelor încovoietoare m_1 (fig. 12.28, *f*).

Se calculează coeficienții (12.74), utilizând regula lui Vereșceaghin

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \ell F \ell \frac{2}{3} (-\ell) + \frac{1}{2} \ell F \ell (-\ell) \right] = -\frac{5F\ell^3}{6EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[2 \frac{1}{2} \ell (-\ell) \frac{2}{3} (-\ell) + \ell (-\ell) (-\ell) \right] = \frac{5\ell^3}{3EI},$$

apoi, din ecuația canonică, necunoscuta static nedeterminată

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{F}{2}.$$

Se înlocuiește această valoare în sistemul static determinat echivalent (fig. 12.28, g) și se construiește diagrama momentelor încovoietoare (fig. 12.28, h).

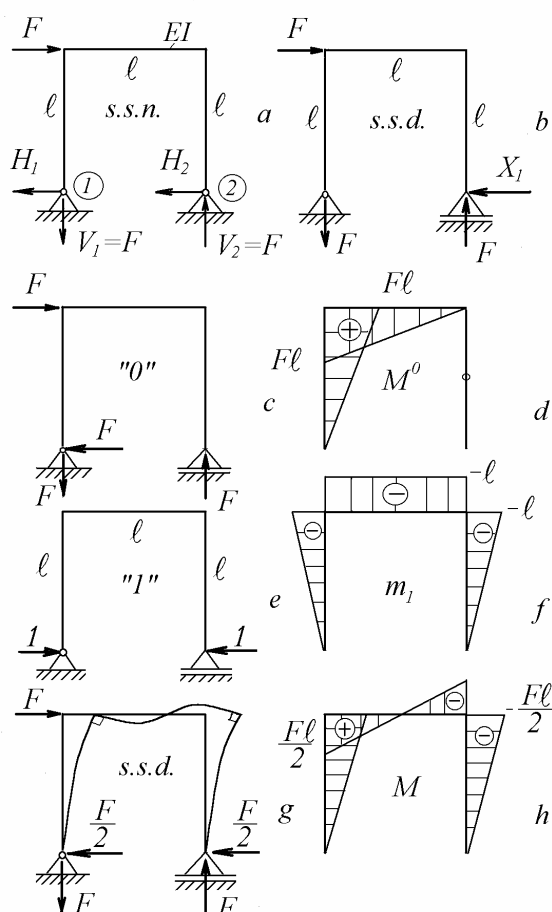


Fig. 12.28

Dacă eronat s-ar alege V_2 ca necunoscută static nedeterminată, atunci sistemul 0 nu ar fi static determinat, ci mecanism.

Exemplul 12.23

Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la cadrul dublu încastrat din figura 12.29, *a*.

Rezolvare

Sistemul este triplu static nedeterminat. Se aleg reacțiunile V_2 , H_2 și M_2 drept necunoscute static nedeterminate. Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 12.29, *b*), transformând încastrarea 2 în capăt liber, deci anulând legăturile corespunzătoare reacțiunilor static nedeterminate, care devin sarcinile exterioare X_1 , X_2 și X_3 .

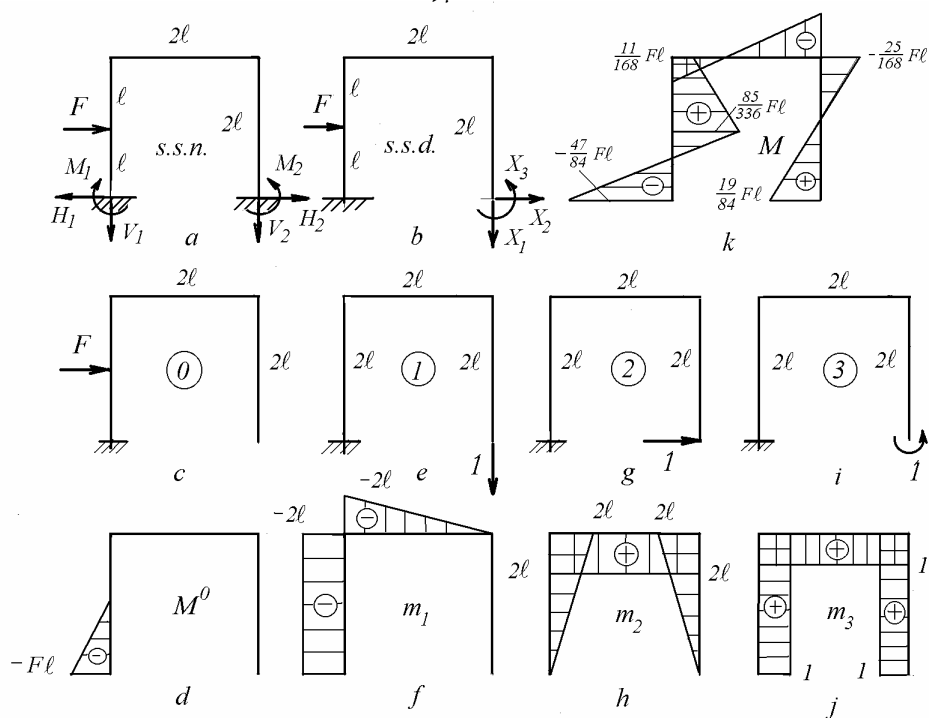


Fig. 12.29

Se construiește sistemul 0 (fig. 12.29, *c*) și diagrama momentelor încovoietoare M^0 (fig. 12.29, *d*), apoi sistemul 1 (fig. 12.29, *e*) și diagrama momentelor încovoietoare m_1 (fig. 12.29, *f*), sistemul 2 (fig. 12.29, *g*) și diagrama m_2 (fig. 12.29, *h*) și sistemul 3 (fig. 12.29, *i*) și diagrama m_3 (fig. 12.29, *j*).

Se calculează coeficienții (12.74), utilizând regula lui Vereshchagin

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell (-F \ell) (-2\ell) = \frac{F \ell^3}{EI},$$

$$\begin{aligned}\delta_{20} &= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell (-F \ell) \frac{2\ell}{6} = -\frac{F \ell^3}{6EI}, \\ \delta_{30} &= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \ell (-F \ell) \cdot 1 = -\frac{F \ell^2}{2EI}, \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 2\ell (-2\ell) \frac{2}{3} (-2\ell) + 2\ell (-2\ell) (-2\ell) \right] = \frac{32\ell^3}{3EI}, \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \left(2 \frac{1}{2} 2\ell \cdot 2\ell \frac{2}{3} 2\ell + 2\ell \cdot 2\ell \cdot 2\ell \right) = \frac{40\ell^3}{3EI}, \\ \delta_{33} &= \frac{1}{EI} (2 \cdot 2\ell \cdot 1 \cdot 1 + 2\ell \cdot 1 \cdot 1) = \frac{6\ell}{EI}, \\ \delta_{12} &= \frac{1}{EI} \left[2\ell \cdot (-2\ell) \ell + \frac{1}{2} 2\ell \cdot (-2\ell) \cdot 2\ell \right] = -\frac{8\ell^3}{EI}, \\ \delta_{13} &= \frac{1}{EI} \left[2\ell \cdot (-2\ell) \cdot 1 + \frac{1}{2} 2\ell \cdot (-2\ell) \cdot 1 \right] = -\frac{6\ell^2}{EI}, \\ \delta_{23} &= \frac{1}{EI} \left(2 \frac{1}{2} 2\ell \cdot 2\ell \cdot 1 + 2\ell \cdot 2\ell \cdot 1 \right) = \frac{8\ell^2}{EI}.\end{aligned}$$

După înlocuire în ecuațiile (12.75), se obține sistemul algebric liniar

$$\begin{aligned}\frac{32}{3}\ell^3 X_1 - 8\ell^3 X_2 - 6\ell^2 X_3 &= -F \ell^3, \\ -8\ell^3 X_1 + \frac{40}{3}\ell^3 X_2 + 8\ell^2 X_3 &= \frac{F \ell^3}{6}, \\ -6\ell^2 X_1 + 8\ell^2 X_2 + 6\ell X_3 &= \frac{F \ell^2}{2},\end{aligned}$$

cu soluțiile

$$X_1 = -\frac{3F}{28}, \quad X_2 = -\frac{3F}{16} \quad \text{și} \quad X_3 = \frac{19F\ell}{168}.$$

Se înlocuiesc aceste valori în s.s.d. echivalent și se construiește diagrama momentelor încovoietoare (fig. 12.29, *k*).

Exemplul 12.24

Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la cadrul dublu încastrat din figura 12.30, *a* prin descompunere într-un sistem simetric și unul antisimetric.

Rezolvare

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, cadrul din figura 12.30, *a* este înlocuit prin cele două cadre din figurile 12.30, *b* și *c*, unul încărcat simetric și altul încărcat antisimetric, care se rezolvă ca sisteme static nedeterminate interior prin secționare în planul de simetrie geometrică.

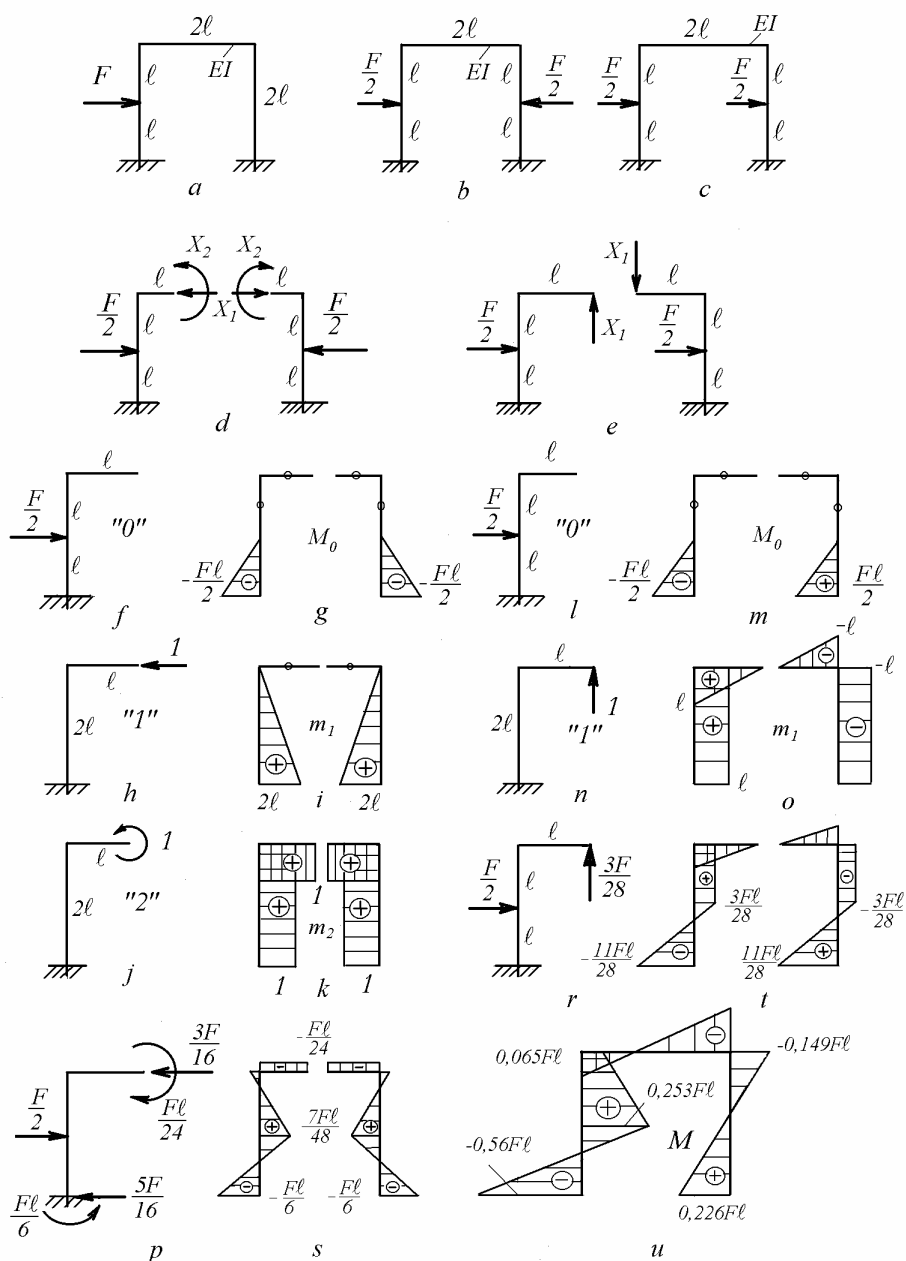


Fig. 12.30

La cadrul din figura 12.30, *d*, încărcat simetric, în planul de simetrie forța tăietoare este nulă, deci acționează doar o forță axială și un moment încovoietor care se aleg ca necunoscute static nedeterminate X_1 și X_2 . Pentru jumătate din cadru se construiesc sistemele 0, 1 și 2, diagramele M^0 , m_1 și m_2 (fig. 12.30, *f*,...*k*). Se calculează coeficienții ecuațiilor canonice

$$\delta_{10} = -\frac{5F\ell^3}{12EI}, \quad \delta_{20} = -\frac{F\ell^2}{4EI}, \quad \delta_{11} = \frac{8\ell^3}{3EI}, \quad \delta_{22} = \frac{3\ell}{EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2\ell^2}{EI}$$

se scrie sistemul ecuațiilor canonice

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}\ell^3 X_1 + 2\ell^2 X_2 &= \frac{5F\ell^3}{12}, \\ 2\ell^2 X_1 + 3\ell X_2 &= \frac{F\ell^2}{4}, \end{aligned}$$

și se determină necunoscutele static nedeterminate

$$X_1 = \frac{3F}{16} \quad \text{și} \quad X_2 = -\frac{F\ell}{24}.$$

La cadrul din figura 12.30, *e*, încărcat antisimetric, în planul de simetrie acționează doar o forță tăietoare care se alege ca necunoscută static nedeterminată. Pentru jumătate din cadru se construiesc sistemele 0, și 1, diagramele M^0 și m_1 (fig. 12.30, *l*,...*o*). Se calculează coeficienții ecuației canonice

$$\delta_{10} = -\frac{F\ell^3}{4EI}, \quad \delta_{11} = \frac{7\ell^3}{3EI}$$

și se determină necunoscuta static nedeterminată $X_1 = \frac{3F}{28}$.

Valorile necunoscutelor static nedeterminate se înlocuiesc în s.s.d. echivalente (fig. 12.30, *p*, *r*). și se construiesc diagramele momentelor încovoietoare (fig. 12.30, *s*, *t*). Se însumează cele două diagrame rezultând diagrama momentelor încovoietoare a sistemului static nedeterminat dat (fig. 12.30, *u*).

12.11.4 Sisteme static nedeterminate solicitate de forțe axiale

În cazul sistemelor solicitate la întindere-compresiune, ecuațiile canonice ale metodei eforturilor au tot forma (12.75), coeficienții respectivi determinându-se cu relații de forma (12.64).

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{\ell} \int \frac{n_i n_j}{E A} dx, \quad \delta_{j0} = \sum_{\ell} \int \frac{N^0 n_j}{E A} dx. \quad (12.76)$$

În cazul încălzirii uniforme a barelor cu o diferență de temperatură Δt

$$\delta_{j0} = \sum_{\ell} \int \left(\frac{N^0}{E A} + \alpha \cdot \Delta t \right) n_j dx, \quad (12.77)$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară al materialului barei.

Exemplul 12.25

La sistemul din figura 12.31, *a*, format din o bară rigidă, articulată la un capăt, suspendată de două elemente elastice și sollicitată de forța F , se cer eforturile în barele verticale articulate la capete.

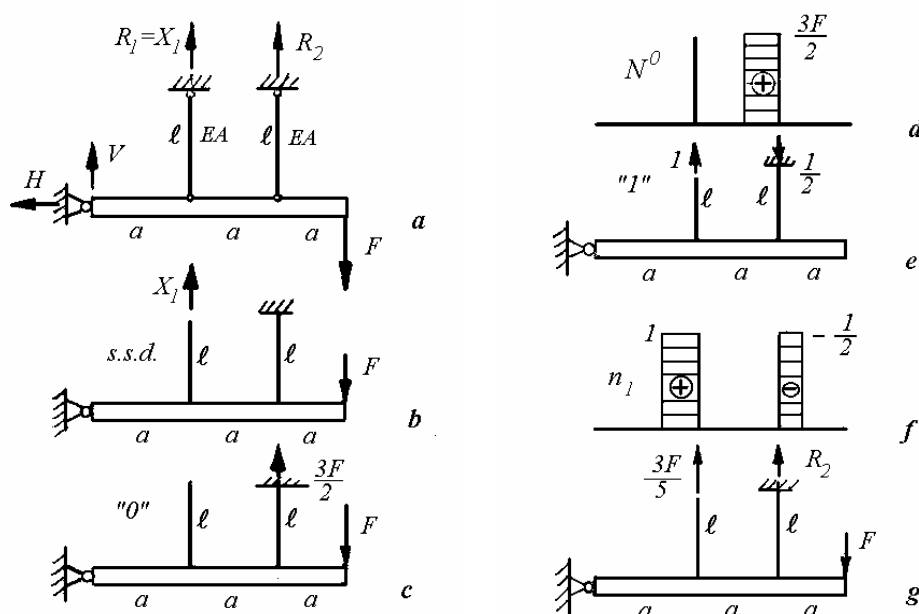


Fig. 12.31

Rezolvare

Înlocuind legăturile cu reacțiuni, se pun în evidență patru reacțiuni H , V , R_1 și R_2 , deci sistemul este simplu static nedeterminat. Se alege $R_1 = X_1$ drept necunoscută static nedeterminată. Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 12.31, *b*),

sistemul 0 (fig. 12.31, c) și diagrama N^0 (fig. 12.31, d), apoi sistemul I (fig. 12.31, e) și diagrama n_1 (fig. 12.31, f).

Utilizând regula lui Vereșceaghin, rezultă

$$\delta_{10} = \frac{1}{EA} \frac{3F}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \ell = -\frac{3F\ell}{4EA},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \left[1 \cdot \ell \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \ell \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{5\ell}{4EA},$$

deci

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{3F}{5}.$$

În sistemul static determinat echivalent (fig. 12.31, g) se poate calcula reacțiunea $R_2 = \frac{6F}{5}$.

Exemplul 12.26

Grinda cu zăbrele din figura 12.32, a are articulații fixe în punctele 1 și 2. Se cer reacțiunile și eforturile axiale din bare. Barele au același modul de rigiditate EA (v. par. 5.3.3.4).

Rezolvare

Sistemul are $b = 5$ bare, $r = 4$ reacțiuni și $a = 4$ articulații. Gradul de nedeterminare este

$$n = b + r - 2a = 1.$$

Se consideră sistemul static nedeterminat interior și se alege ca necunoscută static nedeterminată forța axială din bara 5.

Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 12.32, b) secționând bara 5, deci transformând efortul axial din bară în forțele exterioare X_1 , egale și de sens contrar, aplicate barei 5 și articulației 1, pe direcția barei 5.

Se construiește sistemul 0 (fig. 12.32, c) care se obține din s.s.n. dat, practic prin eliminarea barei 5.

Se izolează fiecare articulație și se scriu ecuațiile de proiecții ale forțelor care acționează asupra "nodului" respectiv. Rezultă un sistem de 8 ecuații din care se calculează 4 reacțiuni și 4 eforturi interioare.

Pentru nodul 4 (fig. 12.32, e) se obține

$$T_4 - T_1/\sqrt{2} = 0, \quad F - T_1/\sqrt{2} = 0.$$

Pentru nodul 3 (fig. 12.32, *f*)

$$T_2 - T_3/\sqrt{2} - T_1/\sqrt{2} = 0, \quad T_1/\sqrt{2} - T_3/\sqrt{2} = 0.$$

Pentru nodul 1 (fig. 12.32, *g*)

$$H_1 = T_2, \quad V_1 = 0.$$

Pentru nodul 2 (fig. 12.32, *h*)

$$T_4 + T_3/\sqrt{2} - H_2 = 0, \quad V_2 - T_3/\sqrt{2} = 0.$$

Rezultă

$$T_1 = \sqrt{2}F, \quad T_4 = F, \quad T_3 = \sqrt{2}F, \quad T_2 = 2F,$$

$$H_1 = 2F, \quad V_1 = 0, \quad H_2 = 2F, \quad V_2 = F.$$

Forțele axiale din bare, cu semnul din Rezistența materialelor, sunt

$$N_1^0 = -T_1 = -\sqrt{2}F, \quad N_2^0 = -T_2 = -2F, \quad N_3^0 = T_3 = \sqrt{2}F, \quad N_4^0 = T_4 = F.$$

Se construiește sistemul *I* (fig. 12.32, *d*) în care acționează doar forțe egale cu *I* în locul lui X_1 și în care $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ și $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$.

Ecuțiile de echilibru ale nodurilor (fig. 12.32, *i, j, k, l*) se scriu

$$T_4 + 1 \cdot 2/\sqrt{5} + T_1/\sqrt{2} = 0, \quad T_1/\sqrt{2} + 1 \cdot 1/\sqrt{5} = 0,$$

$$T_2 - T_3/\sqrt{2} - T_1/\sqrt{2} = 0, \quad T_1/\sqrt{2} - T_3/\sqrt{2} = 0,$$

$$-T_2 + 1 \cdot 2/\sqrt{5} + H_1 = 0, \quad 1/\sqrt{5} - V_1 = 0,$$

$$H_2 - T_4 + T_3/\sqrt{2} = 0, \quad V_2 - T_3/\sqrt{2} = 0.$$

Rezultă

$$T_1 = 2/\sqrt{10}, \quad T_4 = 1/\sqrt{5}, \quad T_3 = 2/\sqrt{10}, \quad T_2 = 2/\sqrt{5},$$

$$H_1 = 0, \quad V_1 = 1/\sqrt{5}, \quad H_2 = 0, \quad V_2 = 1/\sqrt{5}.$$

Forțele axiale din bare, cu semnul din Rezistența materialelor, sunt

$$n_1 = -T_1 = -2/\sqrt{10}, \quad n_2 = -T_2 = -2/\sqrt{5},$$

$$n_3 = T_3 = 2/\sqrt{10}, \quad n_4 = -T_4 = -1/\sqrt{5}, \quad n_5 = 1.$$

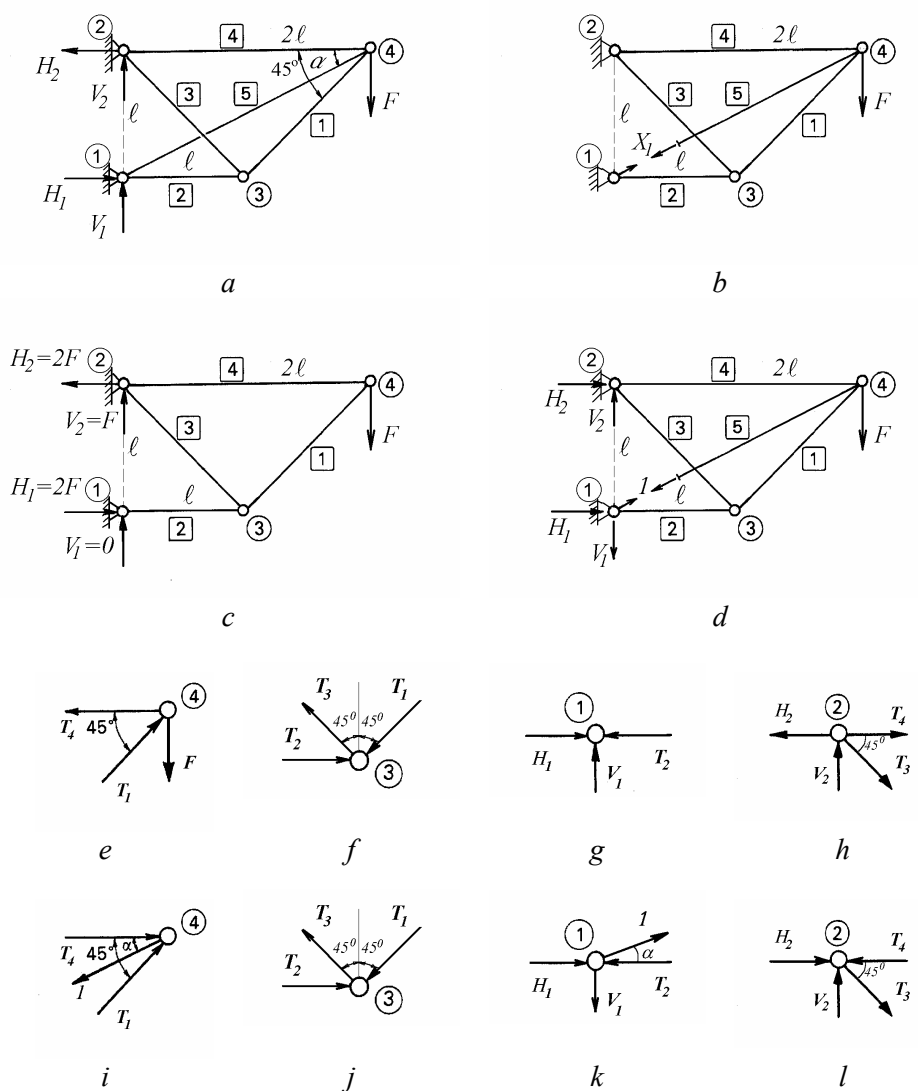


Fig. 12.32

Se calculează coeficienții ecuației canonice

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i^0 n_i \ell_i}{EA} = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \frac{F \ell}{EA},$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^5 \frac{n_i^2 \ell_i}{EA} = \frac{4\sqrt{2} + 5\sqrt{5} + 6}{5} \frac{\ell}{EA},$$

apoi necunoscuta static nedeterminată

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{(4 + \sqrt{2})\sqrt{10}}{4\sqrt{2} + 5\sqrt{5} + 6} F = -0,75 F.$$

Forțele axiale din barele s.s.n. dat se calculează cu relația

$$N_i = N_i^0 + X_1 \cdot n_i.$$

Rezultă

$$N_1 = -0,94 F, \quad N_2 = -1,3294 F,$$

$$N_3 = -N_1 = 0,94 F, \quad N_4 = -1,3353 F, \quad N_5 = X_1 = -0,7497 F.$$

Reacțiunile sunt

$$H_1 = 2 F, \quad H_2 = 2 F, \quad V_1 = 0,3353 F, \quad V_2 = F - V_1 = 0,6647 F.$$

Rezolvarea aceleiași probleme prin metoda deplasărilor s-a făcut în capitolul 5, par. 5.3.3.4.

Exemplul 12.27

Să se calculeze reacțiunile și eforturile axiale din barele sistemului din figura 12.32, *a* considerând sistemul static nedeterminat exterior.

Rezolvare

Se alege ca necunoscută static nedeterminată reacțiunea V_1 . Se construiește s.s.d. echivalent transformând articulația I în reazem simplu și aplicând în I forța exterioară X_1 .

Se construiește sistemul 0 (fig. 12.33, *a*). Din ecuațiile de echilibru se determină forțele care acționează asupra nodurilor (fig. 12.33, *c, d, e, f*) ținând cont că $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ și $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$.

Forțele axiale din bare sunt

$$N_1^0 = -\sqrt{2} F, \quad N_2^0 = -2 F, \quad N_3^0 = \sqrt{2} F, \quad N_4^0 = F, \quad N_5^0 = 0.$$

Se construiește sistemul I (fig. 12.33, *b*) în care acționează o forță egală cu I în locul lui X_1 și se determină forțele care acționează asupra nodurilor (fig. 12.33, *g, h, i, j*).

Forțele axiale din bare sunt

$$n_1 = \sqrt{2}, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = -\sqrt{2}, \quad n_4 = 1, \quad n_5 = -\sqrt{5}.$$

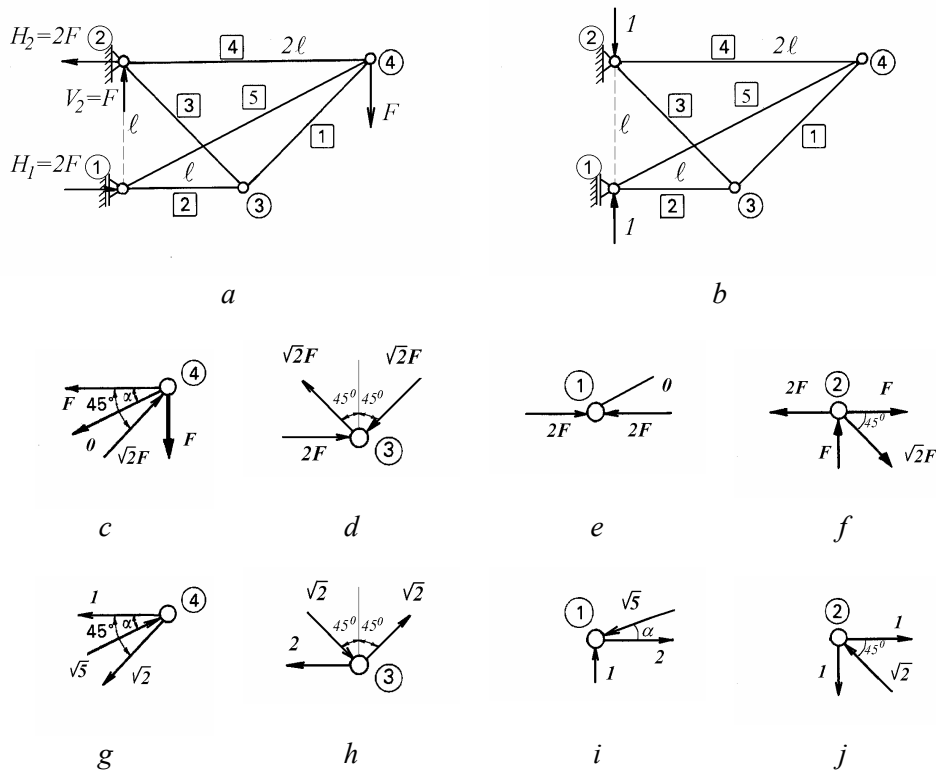


Fig. 12.33

Se calculează coeficienții ecuației canonice

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i^0 n_i \ell_i}{E A} = -(2 + 4\sqrt{2}) \frac{F \ell}{E A},$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^5 \frac{n_i^2 \ell_i}{E A} = (4\sqrt{2} + 5\sqrt{5} + 6) \frac{\ell}{E A},$$

apoi necunoscuta static nedeterminată

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2} + 5\sqrt{5} + 6} F = 0,3353 F.$$

Forțele axiale din barele s.s.n. se calculează cu relația

$$N_i = N_i^0 + X_1 \cdot n_i.$$

Rezultă

$$N_1 = -0,94 F, \quad N_2 = -1,3294 F,$$

$$N_3 = 0,94F, N_4 = -1,3353F, N_5 = -0,7497F.$$

Reacțiunile sunt

$$H_1 = 2F, H_2 = 2F, V_1 = 0,3353F, V_2 = 0,6647F.$$

Exemplul 12.28

La sistemul din figura 12.34, *a*, format din o bară rigidă, articulată și suspendată de două elemente elastice și încălzit uniform cu Δt , se cer tensiunile în barele verticale articulate la capete, dacă $E = 210 \text{ GPa}$ și $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.

Rezolvare

Se alege $R_1 = X_1$ drept necunoscută static nedeterminată. Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 12.34, *b*), apoi sistemul *I* (fig. 12.34, *c*) în care se calculează eforturile axiale $n_1 = 1$ și $n_2 = -1/2$.

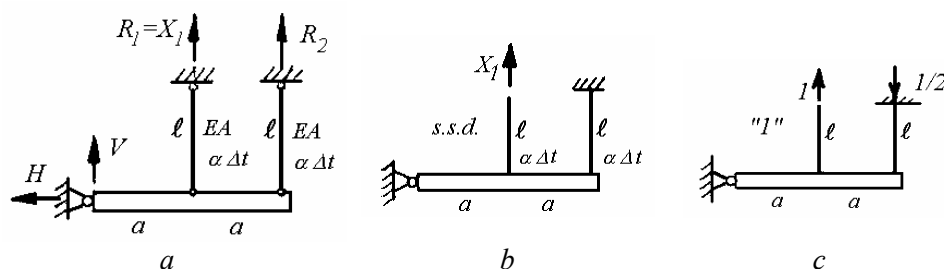


Fig. 12.34

Din relațiile (12.77) și (12.76) se obține

$$\delta_{10} = \ell \alpha \Delta t (n_1 + n_2) = \frac{1}{2} \ell \alpha \Delta t, \quad \delta_{11} = \frac{\ell}{EA} (n_1^2 + n_2^2) = \frac{5\ell}{4EA},$$

deci

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{2}{5} EA \alpha \Delta t.$$

Forțele axiale în barele verticale sunt

$$N_1 = -\frac{2}{5} EA \alpha \Delta t, \quad N_2 = \frac{1}{5} EA \alpha \Delta t.$$

Rezultă tensiunile în barele verticale

$$\sigma_1 = -\frac{2}{5} E \alpha \Delta t = -40,32 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_2 = \frac{1}{5} E \alpha \Delta t = 20,16 \text{ N/mm}^2.$$

13.

FLAMBAJUL BARELOR DREPTE

La barele zvelte sollicitate la compresiune, începutul pierderii integrității structurale poate apare la tensiuni inferioare limitei de curgere sau de rupere. Aceasta se datorește instabilității elastice care conduce la *flambaj*. Cât timp sarcinile exterioare sunt inferioare unor valori limită, barele au o configurație stabilă. Pentru forțe care depășesc "sarcina critică", sistemul devine nestabil, având deformații care fie depășesc limitele admise curent în practica inginerescă, fie duc la rupere. Deci sarcina critică definește o *limită de flambaj* care este o limită de stabilitate și care, pentru asigurarea integrității structurale, nu trebuie atinsă.

În acest capitol se definesc conceptele de *stabilitate elastică* și *sarcină critică de flambaj*. Întrucât limita de flambaj corespunde *echilibrului indiferent*, iar sarcina critică menține bara într-o configurație ușor deformată, eforturile din bară depind și de deformațiile acesteia iar echilibrul se scrie pentru forma deformată, spre deosebire de problemele studiate până acum în care echilibrul era scris pentru forma nedeformată, deformațiile elastice fiind neglijabil de mici.

Teoria stabilității liniare definește doar valoarea sarcinii critice de flambaj și deformată corespunzătoare, pornind de la ecuația liniarizată a liniei elastice a barei, considerând forțe conservative, care își păstrează direcția de acțiune. Împărțind forța critică la un *coeficient de siguranță la flambaj*, se determină forța capabilă de compresiune. Comportarea postcritică se caracterizează prin deformații mari, descrise de o teorie neliniară, deci de un calcul de ordinul trei, care depășește cadrul acestui curs.

13.1 Instabilitatea elastică

Un corp rigid este în *echilibru stabil* dacă, deplasat din poziția de echilibru, tinde să revină singur în poziția inițială. Este cazul unei bile într-o concavitate (fig. 13.1, *a*). Orice perturbație exterioară face ca bila să se deplaseze într-o poziție vecină, căreia îi corespunde o energie potențială mai mare, ea tinzând apoi să revină în poziția de potențial minim.

Un corp este în *echilibru nestabil* dacă, deplasat din poziția de echilibru, tinde să continue singur mișcarea. Este cazul unei bile în echilibru pe o convexitate (fig. 13.1, *b*). Cea mai mică perturbație deplasează bila într-o poziție care îi corespunde o energie potențială mai mică. Ea părăsește poziția de echilibru nestabil fără să mai revină.

În fine, corpul este în *echilibru indiferent* dacă rămâne în echilibru în orice poziție vecină în care este deplasat. Este cazul bilei pe un plan orizontal (fig. 13.1, *c*). Testarea stabilității echilibrului se face tot printr-o perturbație exterioară, care deplasează corpul într-o poziție de aceeași energie potențială, constituind o nouă posibilitate de echilibru.

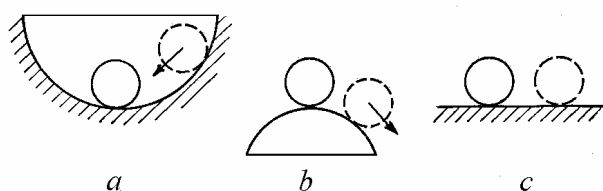


Fig. 13.1

Dacă se notează cu π energia potențială a corpului în starea inițială, prin deplasarea lui din această poziție, energia potențială capătă o variație $\Delta\pi$. Dacă $\Delta\pi > 0$, echilibrul este stabil, dacă $\Delta\pi < 0$, echilibrul este nestabil și dacă $\Delta\pi = 0$, echilibrul este indiferent.

Sistemele elastice au o comportare asemănătoare, cu deosebirea că în locul stabilității *poziției* de echilibru se studiază stabilitatea (*forme* sau *configurației*) de echilibru sub acțiunea sarcinilor exterioare.

Dacă prin deformarea structurii și trecerea ei într-o configurație adiacentă infinit vecină, care satisface condițiile geometrice de rezemare, energia potențială totală crește $\Delta\pi > 0$, deci dacă variația energiei de deformație este mai mare ca lucrul mecanic al forțelor exterioare $\Delta U > \Delta L_e$, atunci configurația inițială este stabilă. Dacă prin deformarea structurii $\Delta U < \Delta L_e$, configurația inițială este nestabilă.

La limita celor două domenii, când $\Delta\pi = 0$, deci când $\Delta U = \Delta L_e$, sistemul este în echilibru indiferent. În condiții ideale, are loc o *bifurcare* a echilibrului, sistemul putând fie să-și păstreze configurația inițială, fie să treacă în altă configurație apropiată. Starea sistemului la atingerea echilibrului indiferent este considerată *critică*, sarcinile corespunzătoare fiind denumite *sarcini critice*.

Astfel, în cazul unei bare drepte, simplu rezemate la capete, solicitate axial (fig. 13.2), se reîntâlnesc cazurile de echilibru din figura 13.1.

Dacă forța F este mai mică decât sarcina critică F_{cr} , forma rectilinie reprezintă o configurație stabilă. Acționând asupra barei cu o forță Q , bara se deformează. La îndepărtarea forței Q , bara revine la forma rectilinie inițială (de echilibru stabil).

Dacă $F > F_{cr}$, teoretic forma rectilinie reprezintă o configurație de echilibru. Aplicarea forței transversale Q face ca bara să părăsească forma rectilinie, să se deformeze foarte mult, ceea ce, în general, duce la rupere, sau la o nouă configurație de echilibru curbilinie. Forma rectilinie inițială reprezintă o configurație de echilibru nestabil.

Dacă $F = F_{cr}$, bara poate fi deformată prin aplicarea forței Q , și orice formă deformată apropiată de forma inițială reprezintă o configurație de echilibru, căci forța critică F_{cr} corespunde echilibrului indiferent.

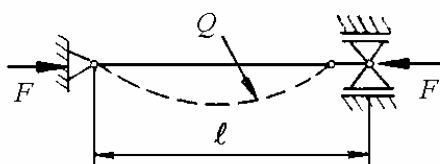


Fig. 13.2

Dacă forța F este aplicată static, deci dacă valoarea ei crește monoton de la zero la valoarea nominală, forța critică F_{cr} se atinge atunci când este posibilă o configurație de echilibru curbilinie, deci când se pierde stabilitatea formei rectilinii.

În general, *pierderea stabilității unei anumite configurații de echilibru a unui sistem deformabil, sub acțiunea forțelor aplicate, se numește flambaj*. Deoarece după flambaj se produc deformații mari, însoțite de tensiuni mari, flambajul duce în general la pierderea integrității structurale sau la pierderea capacității portante a structurilor deformabile.

Fenomenul de flambaj pur (cu bifurcarea echilibrului) descris mai sus este practic irealizabil. Barele nu sunt perfect rectilinii, având deformații inițiale, iar forțele nu se pot aplica perfect axial. Practic, se observă o *încovoiere cu compresiune*, care duce la *flambajul prin divergență*.

În acest caz, imperfecțiunile geometrice și sarcinile transversale produc o configurație inițială ușor deformată. Forța axială produce un moment încovoiător care accentuează aceste deformații. Creșterea deformațiilor duce la creșterea momentului încovoiător, care la rândul lui mărește deformațiile. Când F tinde spre F_{cr} , fenomenul este divergent, deformațiile crescând teoretic nelimitat.

13.2 Calculul sarcinii critice prin metoda energetică

Se consideră bara dreaptă, comprimată axial, din figura 13.3. Forța critică de flambaj F_{cr} se determină din condiția de echilibru indiferent, egalând lucrul mecanic al forței exterioare F_{cr} :

$$L_e = F_{cr} u$$

cu energia de deformație la încovoiere acumulată de bară în configurația curbilinie

$$U = \int_{\ell} \frac{M_y^2 dx}{2 EI_y} = \frac{1}{2} \int_{\ell} EI_y (w'')^2 dx . \quad (13.1)$$

Deplasarea u a punctului de aplicație al forței F_{cr} este egală cu diferența între lungimea barei ℓ și proiecția fibrei medii deformată pe direcția de acțiune a forței F_{cr} .

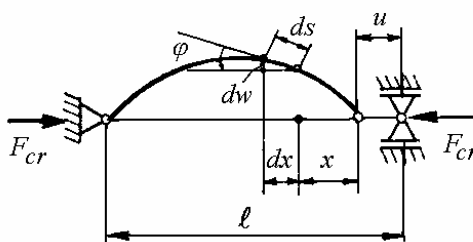


Fig. 13.3

Pentru un element de bară de lungime ds , se poate scrie :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dw)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \cong dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right] = dx \left(1 + \frac{1}{2} \varphi^2 \right)$$

unde s-a utilizat ipoteza micilor deformații, $\frac{dw}{dx} = -\text{tg } \varphi \cong -\varphi$.

Deplasarea elementară este

$$du = ds - dx = \frac{1}{2} \varphi^2 dx ,$$

deci deplasarea punctului de aplicație al forței critice de flambaj este

$$u = \int_0^{\ell} du = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (w')^2 dx$$

iar lucrul mecanic al acesteia este

$$L_e = \frac{F_{cr}}{2} \int_0^{\ell} (w')^2 dx. \quad (13.2)$$

Egalând expresiile (13.1) și (13.2), se obține relația de calcul a forței critice de flambaj prin *metoda energetică* (S. Timoshenko, 1910):

$$F_{cr} = \frac{\int_0^{\ell} EI_y (w'')^2 dx}{\int_0^{\ell} (w')^2 dx}. \quad (13.3)$$

Dacă $w(x)$ este forma deformată exactă a barei, atunci din relația (13.3) se obține valoarea exactă a forței critice de flambaj. Dacă se utilizează o formă deformată aproximativă, care satisface condițiile la limită geometrice, din relația (13.3) rezultă o valoare aproximativă a forței F_{cr} , întotdeauna mai mare ca cea exactă, aproximația fiind cu atât mai bună cu cât $w(x)$ se apropie mai mult de forma exactă.

Astfel, dacă se alege deformată exactă (v. par. 13.3)

$$w(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{\ell},$$

atunci

$$\int_0^{\ell} (w')^2 dx = \frac{w_0^2 \pi^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{w_0^2 \pi^2}{\ell^2} \frac{\ell}{2} = \frac{w_0^2 \pi^2}{2 \ell},$$

$$\int_0^{\ell} (w'')^2 dx = \frac{w_0^2 \pi^4}{\ell^4} \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{w_0^2 \pi^4}{\ell^4} \frac{\ell}{2} = \frac{w_0^2 \pi^4}{2 \ell^3},$$

iar forța critică de flambaj este

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{9,869 EI}{\ell^2}. \quad (13.4)$$

Dacă se alege deformată aproximativă

$$w(x) = a(x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3 x),$$

corespunzând barei simplu rezemate, încărcate cu o sarcină transversală uniform distribuită (8.66), atunci

$$\int_0^{\ell} (w')^2 dx = a^2 \int_0^{\ell} (4x^3 - 6\ell x^2 + \ell^3)^2 dx = \frac{17}{35} a^2 \ell^7 ,$$

$$\int_0^{\ell} (w'')^2 dx = 144 a^2 \int_0^{\ell} (x^2 - \ell x)^2 dx = \frac{24}{5} a^2 \ell^5 .$$

Forța critică de flambaj este

$$F_{cr} = \frac{\frac{24}{5} a^2 \ell^5 E I}{\frac{17}{35} a^2 \ell^7} = \frac{9,882 E I}{\ell^2} ,$$

fiind cu 0,2% mai mare decât valoarea exactă (13.4).

Metoda este utilă pentru calculul sarcinii critice la bare de secțiune variabilă sau încărcate cu sarcini axiale distribuite în lungul barei.

13.3 Calculul sarcinii critice prin metoda diferențială

Pentru o bară comprimată axial, sarcina critică poate fi obținută studiind comportarea unei bare ideale, considerată a fi inițial perfect rectilinie și comprimată de o forță perfect centrată. Forța critică se definește ca forța axială necesară să mențină bara în echilibru indiferent, într-o configurație ușor încovoiată. Calculul se poate face fie utilizând ecuația diferențială liniarizată de ordinul doi a liniei elastice a barei (metoda lui Euler), fie ecuația diferențială de ordinul patru, caz în care se descriu mai ușor condiții de rezemare diferite.

13.3.1 Metoda lui Euler

Fie bara dreaptă, articulată la capete, comprimată axial (fig. 13.4). Se consideră bara în starea deformată de după flambaj și se pune problema determinării condițiilor în care aceasta reprezintă o configurație de echilibru a barei, sub acțiunea forțelor de compresiune.

În secțiunea x , momentul încovoietor este

$$M(x) = F w ,$$

deci ecuația diferențială a fibrei medii deformată (8.57) se scrie

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -Fw, \quad (13.5)$$

sau

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0, \quad (13.6)$$

unde s-a notat

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI}. \quad (13.7)$$

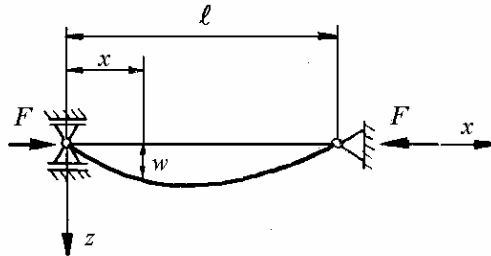


Fig. 13.4

Soluția generală a ecuației de tip Euler (13.6) este

$$w(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x. \quad (13.8)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită

$$x = 0, w = 0 \text{ și } x = l, w = 0.$$

Rezultă $C_2 = 0$ și $C_1 \sin \alpha l = 0$.

Deoarece $C_1 \neq 0$ (altfel bara nu ar fi deformată) și $\alpha \neq 0$ (căci $F \neq 0$), se obține $\sin \alpha l = 0$, $\alpha l = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), deci ecuația (13.6) are soluții dacă

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}. \quad (13.9)$$

Înlocuind expresia (13.9) în formula (13.7), se obține expresia forței de compresiune la care forma deformată este configurație de echilibru

$$F_f = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (13.10)$$

iar din relația (13.8) rezultă deformata corespunzătoare

$$w_n(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (13.11)$$

Constanta C_1 nu poate fi determinată, deci poate fi aleasă arbitrar, ceea ce corespunde condiției de echilibru indiferent la limita de stabilitate. Această condiție se poate realiza numai pentru un șir discret de valori ale forței de compresiune

$$(13.10): F_1 = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad F_2 = 4 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad F_3 = 9F_1, \quad \dots, \quad F_n = n^2 F_1, \quad \text{c\u0103rora le}$$

corespond deformatelile $w_1(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{\ell}$, $w_2(x) = C_1 \sin \frac{2\pi x}{\ell}$, \dots ,

$w_n(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{\ell}$, unde n este num\u0103rul de "semiunde".

Valoarea minim\u0103

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad (13.12)$$

se numește *forța critică de flambaj*, deoarece la aplicarea statică a sarcinilor flambajul se produce la această valoare a forței de compresiune.

Dacă bara are reazeme intermediare suplimentare, care de fapt modifică condițiile la limită și permit deformarea numai în una din formele $w_2(x)$, $w_3(x)$ etc., atunci forța critică are valorile mai mari $F_2 = 4F_1$, $F_3 = 9F_1$ etc. care corespund acestor deformatelile. Reazemele intermediare măresc valoarea forței critice de flambaj.

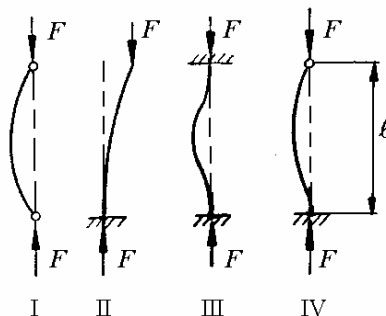


Fig. 13.5

Dacă secțiunea transversală a barei are momente de inerție axiale diferite față de două axe perpendiculare între ele, flambajul are loc în planul perpendicular pe axa față de care momentul de inerție este minim, deci relația (13.12) se scrie

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\ell^2}. \quad (13.13)$$

În figura 13.5 se prezintă patru cazuri de bare comprimate axial prin forțe aplicate la capete, indicând și forma deformată după flambaj. Calculul forței critice de flambaj pentru cazurile II, III și IV se face ca pentru bara articulată la capete (cazul I), utilizând condițiile la limită corespunzătoare.

Expresiile forței critice de flambaj pentru toate cele patru cazuri se pot scrie sub forma *formulei lui Euler*

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\ell_f^2}, \quad (13.14)$$

unde *lungimea de flambaj* ℓ_f , egală cu lungimea unei *semiunde* (distanța între două puncte de inflexiune consecutive) este $\ell_f = \ell$ (cazul I), $\ell_f = 2\ell$ (cazul II), $\ell_f = \ell/2$ (cazul III), $\ell_f = 0,699\ell$ (cazul IV). Relația (13.14), a fost stabilită de Leonhard Euler în 1759, iar cele patru bare din figura 13.5 se numesc *cele patru cazuri de flambaj ale lui Euler*.

În condiții ideale, după depășirea valorii critice a forței de flambaj, relația forță-deformație se bifurcă. Există două configurații de echilibru și anume, configurația rectilinie de echilibru nestabil, posibilă în absența oricărei perturbații, și configurația încovoiată de echilibru stabil, când deformațiile tind să crească nelimitat. Acestea nu mai sunt descrise de teoria liniară, bazată pe ipoteza micilor deformații.

13.3.2 Ecuația de ordinul patru

Derivând ecuația (13.5) de două ori, se obține

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + F \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (13.15)$$

Pentru bare de secțiune constantă, ecuația (13.15) devine

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (13.16)$$

a cărei soluție este

$$w(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4, \quad (13.17)$$

unde α este dat de relația (13.7).

Cele patru constante de integrare se obțin din condițiile la limită, câte două condiții la fiecare capăt al barei. Dacă bara nu se poate deplasa lateral, săgeata este nulă, $w = 0$. Dacă rotirea este blocată, atunci $w' = 0$, unde "prim" denotă derivare

în raport cu x . La un capăt articulat, momentul încovoietor este nul, deci $w'' = 0$. La un capăt liber, în afara momentului încovoietor, și forța tăietoare este nulă, deci $w''' = 0$.

Pe un reazem elastic, reacțiunea este proporțională cu săgeata, deci forța tăietoare este proporțională cu deplasarea laterală (se ține cont de convenția de semne pentru forța tăietoare, deci semne diferite la capătul din stânga și cel din dreapta). Într-o încastrare elastică, momentul reacțiune este proporțional cu rotirea, deci momentul încovoietor este proporțional cu panta liniei elastice (ținând cont de convenția de semne pentru momente).

Pentru cazul IV din figura 13.5, bara încastrată la un capăt și articulată la celălalt, considerând originea axelor în încastrare, condițiile la limită se scriu

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, & C_2 + C_4 &= 0, \\ w'(0) &= 0, & \alpha C_1 + C_3 &= 0, \\ w(\ell) &= 0, & C_1 \sin \alpha \ell + C_2 \cos \alpha \ell + C_3 \ell + C_4 &= 0, \\ w''(\ell) &= 0, & C_1 \sin \alpha \ell + C_2 \cos \alpha \ell &= 0. \end{aligned}$$

Cele patru relații de mai sus constituie un sistem algebric liniar omogen în cele patru constante de integrare. Pentru a avea soluții diferite de soluția banală este necesar ca determinantul sistemului să fie nul

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell & \ell & 1 \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha \ell = \alpha \ell.$$

Soluția de valoare minimă este $\alpha_1 \ell = 4,4934$ deci sarcina critică este

$$F_{cr} = \alpha_1^2 EI = 20,19 \frac{EI}{\ell^2} = 2,046 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,699 \ell)^2}$$

iar forma deformată are expresia

$$w(x) = C_1 (\sin \alpha x - \alpha \ell \cos \alpha x - \alpha x + \alpha \ell)$$

sau

$$w(x) = C \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha \ell} - \cos \alpha x - \frac{x}{\ell} + 1 \right).$$

De notat că ecuația (13.15) este valabilă pentru bare comprimate prin forțe aplicate la capete, fără sarcini transversale distribuite în lungul barei. În cazul barelor comprimate solicitate de o sarcină transversală $p(x)$, ecuația (13.15) devine

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} = p. \quad (13.18)$$

Forța tăietoare T și momentul încovoietor M sunt date de relațiile

$$EI \frac{d^3 w}{dx^3} + F \frac{dw}{dx} = -T, \quad EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M. \quad (13.19)$$

Aceasta deoarece, din ecuațiile de echilibru pentru un element infinitezimal de bară, delimitat de două secțiuni normale la axa nedeformată a barei, se obțin următoarele ecuații diferențiale între eforturi și sarcini

$$T = \frac{dM}{dx} - F \frac{dw}{dx}, \quad p = -\frac{dT}{dx}.$$

Exemplul 13.1

Se cere să se calculeze forța critică de flambaj pentru bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt (cazul II din figura 13.5).

Rezolvare

Alegând originea axelor în încastrare, condițiile la limită se scriu

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, & C_2 + C_4 &= 0, \\ w'(0) &= 0, & \alpha C_1 + C_3 &= 0. \end{aligned}$$

La capătul liber, momentul încovoietor și forța tăietoare sunt nule

$$\begin{aligned} w''(\ell) &= 0, & C_1 \sin \alpha \ell + C_2 \cos \alpha \ell &= 0, \\ w'''(\ell) + \alpha^2 w'(\ell) &= 0, & C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Rezultă $\cos \alpha \ell = 0, \quad \alpha \ell = \frac{(2n-1)\pi}{2}.$

Soluția de valoare minimă este $\alpha_1 \ell = \frac{\pi}{2}.$

Forța critică de flambaj are expresia

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}. \quad (13.20)$$

13.4 Diagrama tensiunii critice de flambaj

Tensiunea critică de flambaj, σ_f , se definește ca raportul între forța critică de flambaj și aria secțiunii transversale a barei

$$\sigma_f = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\ell_f^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\ell_f^2} i_{min}^2, \quad (13.21)$$

unde

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad (13.22)$$

este raza de inerție minimă a secțiunii transversale.

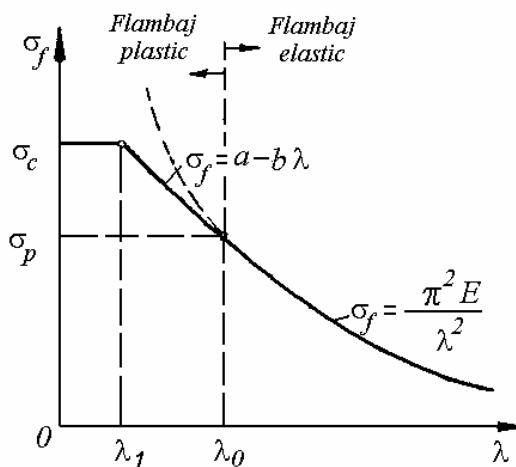


Fig. 13.6

Se introduce mărimea adimensională

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} \quad (13.23)$$

numită *coeficient de zveltețe*.

Cu această notație, relația (13.21) devine

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (13.24)$$

fiind reprezentată grafic în coordonate $\sigma_f - \lambda$ în figura 13.6.

Curba respectivă este o hiperbolă cubică, numită *hiperbola lui Euler*.

Deoarece formula lui Euler (13.14) s-a stabilit pe baza ecuației diferențiale liniarizate a fibrei medii deformată (8.57), iar la deducerea acesteia s-a utilizat ipoteza elasticității liniare, deci legea lui Hooke, rezultă că relația (13.24) este valabilă pentru valori σ_f mai mici sau egale cu limita de proporționalitate σ_p a materialului.

Se notează λ_0 abscisa punctului de ordonată $\sigma_f = \sigma_p$. Rezultă că formula lui Euler este valabilă numai pentru valori $\lambda > \lambda_0$ pentru care fenomenul se numește *flambaj elastic*.

În zona pentru care $\lambda < \lambda_0$, tensiunea critică de flambaj este mai mare decât limita de proporționalitate, $\sigma_f > \sigma_p$, fenomenul numindu-se *flambaj plastic*. În domeniul flambajului plastic, pe baza experiențelor conduse de F. S. Iașinski (1895) și L. Tetmajer (1896), diagrama tensiunii critice de flambaj se aproximează cu o linie dreaptă, de ecuație

$$\sigma_f = a - b\lambda, \quad (13.25)$$

unde constantele a și b au fost determinate experimental.

La materialele ductile, σ_f se limitează superior la limita de curgere a materialului σ_c . Se notează λ_1 abscisa punctului de ordonată $\sigma_f = \sigma_c$. Pentru $\lambda < \lambda_1$ se face un calcul la compresiune.

Tabelul 13.1

Coeficienții din formulele Tetmajer-Iașinski

| Materialul | a (MPa) | b (MPa) | λ_0 | λ_1 |
|---|--------------|--------------|-------------|-------------|
| OL37 ($\sigma_c = 240$ MPa) | 304 | 1,12 | 105 | 60 |
| Oțel cu $\sigma_r = 520$ MPa ($\sigma_c = 360$ MPa) | 450 | 1,94 | 85 | 60 |
| Oțel cu până la 5% nichel | 461 | 2,25 | 86 | 0 |
| Oțel crom-molibden | 980 | 5,30 | 55 | 0 |
| Duraluminiu | 372 | 2,14 | 50 | 0 |
| Lemn de brad | 28,7 | 0,19 | 100 | 0 |

Valorile coeficienților a și b din relația (13.25) și ale limitelor λ_0, λ_1 , sunt date în tabelul 13.1, pentru câteva materiale utilizate frecvent în practică.

La fontă se utilizează o relație parabolică

$$\sigma_f = 760 - 11,7\lambda + 0,052\lambda^2 \quad (\text{MPa})$$

cu $\lambda_0 = 80$ și $\lambda_1 = 0$.

În general, la piese de oțel $\lambda < 250$, iar la piese de fontă $\lambda < 120$, pentru a evita realizarea unor bare prea zvelte.

13.5 Calculul la flambaj

Se definește un *coeficient de siguranță la flambaj*, c_f , egal cu raportul între forța critică F_{cr} și forța de compresiune efectiv aplicată barei, F ,

$$c_f = \frac{F_{cr}}{F}. \quad (13.26)$$

Pentru piese de mașini, acesta are valori cuprinse între limite largi $c_f = 4 \dots 20$, în funcție de importanța piesei în ansamblul respectiv.

Prin calculul de *verificare* la flambaj, se determină coeficientul de siguranță la flambaj și se compară cu valorile recomandate în normele de calcul.

Întâi se calculează coeficientul de zveltețe λ . Dacă $\lambda \geq \lambda_0$, atunci flambajul are loc în domeniul elastic; se calculează F_{cr} cu formula lui Euler (13.14) și se împarte la forța F efectiv aplicată barei, iar c_f trebuie să fie mai mare sau egal cu valoarea prescrisă. Dacă $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$, flambajul are loc în domeniul plastic; se calculează $F_{cr} = A\sigma_f$, unde σ_f este dat de relația (13.25), apoi se calculează c_f și se compară cu valoarea prescrisă. Dacă $\lambda < \lambda_1$, bara se calculează la compresiune.

Calculul de *dimensionare* este îngreunat de faptul că, necunoscând dimensiunile secțiunii transversale, nu se poate calcula i_{min} , deci nici λ , neștiindu-se în ce domeniu are loc flambajul. În această situație, se presupune că flambajul este elastic; se utilizează formula lui Euler (13.14) și relația (13.26), de unde rezultă momentul de inerție axial minim

$$I_{nec} = \frac{F \ell_f^2 c_f}{\pi^2 E}, \quad (13.27)$$

pe baza căruia se determină dimensiunile secțiunii transversale.

Se calculează λ și se compară cu λ_0 . Dacă $\lambda \geq \lambda_0$, utilizarea formulei lui Euler a fost îndreptățită și dimensiunile calculate sunt corecte. Dacă $\lambda < \lambda_0$, formula lui Euler nu este aplicabilă. Este necesară verificarea dimensiunilor cu formulele flambajului plastic. Dacă c_f este mai mic decât valoarea prescrisă, se măresc dimensiunile secțiunii transversale și se reface calculul, până se obține coeficientul de siguranță impus. Dacă prin mărirea dimensiunilor $\lambda < \lambda_1$, se face dimensionarea la compresiune.

Exemplul 13.2

Se cere să se calculeze forța capabilă de compresiune a barei încastrate la un capăt și articulate la celălalt din figura 13.7, dacă $c_f = 3,5$, $\lambda_0 = 105$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\ell = 2 \text{ m}$, secțiunea transversală fiind dreptunghiulară, cu $b = 40 \text{ mm}$ și $h = 60 \text{ mm}$.

Rezolvare

Pentru cazul IV din figura 13.5

$$\ell_f = 0,699 \ell \cong 0,7 \cdot 2 = 1,4 \text{ m}.$$

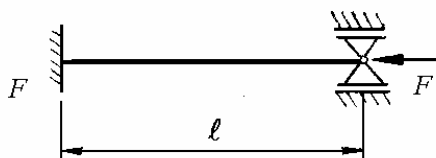


Fig. 13.7

Raza de inerție minimă este

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{40}{\sqrt{12}} = 11,5 \text{ mm}.$$

Coeficientul de zveltețe este

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} = \frac{1400}{11,5} = 122.$$

Deoarece $\lambda > \lambda_0 = 105$, se poate utiliza formula lui Euler și relația (13.26).

Rezultă

$$F_{cap} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{c_f \ell_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 32 \cdot 10^4}{3,5 \cdot 1400^2} = 96682 \text{ N},$$

unde

$$I_{min} = \frac{hb^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} = 32 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Exemplul 13.3

Să se dimensioneze bara din figura 13.7, din oțel cu secțiunea circulară cu diametrul d , dacă $F = 150 \text{ kN}$, $c_f = 3,5$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\ell = 2 \text{ m}$, $\lambda_0 = 105$, $\sigma_f = 304 - 1,12 \lambda$ (MPa).

Rezolvare

Se presupune că flambajul are loc în domeniul elastic, utilizând formula (13.27)

$$I_{nec} = \frac{F \ell_f^2 c_f}{\pi^2 E} = \frac{15 \cdot 10^4 \cdot 1400^2 \cdot 3,5}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 49,6 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

deci

$$\frac{\pi d^4}{64} = 49,6 \cdot 10^4; \quad d = 56 \text{ mm}.$$

Se calculează

$$i_{min} = i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{56}{4} = 14 \text{ mm},$$

apoi

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i} = \frac{1400}{14} = 100 < \lambda_0 = 105,$$

deci formula (13.27) nu este valabilă.

Se calculează coeficientul de siguranță pentru flambajul plastic.

Tensiunea critică de flambaj este

$$\sigma_f = 304 - 1,12 \lambda = 304 - 1,12 \cdot 100 = 192 \text{ N/mm}^2.$$

Aria secțiunii transversale este

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 56^2}{4} = 2463 \text{ mm}^2.$$

Forța critică de flambaj plastic este

$$F'_{cr} = \sigma_f A = 192 \cdot 2463 = 472896 \text{ N}.$$

Rezultă un coeficient de siguranță mai mic decât cel impus

$$c'_f = \frac{F'_{cr}}{F} = \frac{472896}{150000} = 3,15 < c_f = 3,5.$$

Se repetă calculele pentru $d = 60 \text{ mm}$:

$$i_{min} = \frac{d}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ mm}, \quad \lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} = \frac{1400}{15} = 93,3,$$

$$\sigma_f = 304 - 1,12 \cdot 93,3 = 199,5 \text{ N/mm}^2, \quad A = \frac{\pi \cdot 60^2}{4} = 2827 \text{ mm}^2,$$

$$F''_{cr} = 199,5 \cdot 2827 = 563986 \text{ N}.$$

Rezultă un coeficient de siguranță mai mare decât cel impus

$$c''_f = \frac{F''_{cr}}{F} = \frac{563986}{150000} = 3,76 > c_f = 3,5.$$

Se alege o valoare intermediară pentru diametrul barei

$$d = 58 \text{ mm}.$$

Exemplul 13.4

Să se verifice coeficientul de siguranță la flambaj $c_f = 3$, pentru bara din OL37 de profil U8 și lungime $\ell = 1 \text{ m}$, rezemată ca în figurile 13.8, a , b , c , și solicitată de o forță de compresiune centrică $F = 80 \text{ kN}$.

Rezolvare

La profilul U8, în Anexa 2b se dau $A = 1100 \text{ mm}^2$, $I_{min} = 19,4 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, $i_{min} = 13,3 \text{ mm}$. Pentru OL37, $\sigma_f = 304 - 1,12 \lambda \text{ N/mm}^2$, $\lambda_0 = 105$, $\lambda_1 = 60$, $\sigma_c = 240 \text{ N/mm}^2$ și $E = 210 \text{ GPa}$.

a) Pentru cazul de rezemare din figura 13.8, a , lungimea de flambaj $\ell_f = 2 \ell = 2 \text{ m}$.

Coeficientul de zveltețe

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} = \frac{2000}{13,3} = 150,4 > \lambda_0 = 105,$$

arată că flambajul are loc în domeniul elastic.

Se calculează coeficientul efectiv de siguranță la flambaj (13.26), unde pentru F_{cr} se utilizează formula lui Euler (13.14)

$$c_{f\text{ ef}} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{\ell_f^2 F} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 19,4 \cdot 10^4}{2000^2 \cdot 8 \cdot 10^4} = 1,26 < c_f = 3,$$

deci nu este realizat coeficientul de siguranță impus, bara este subdimensionată.

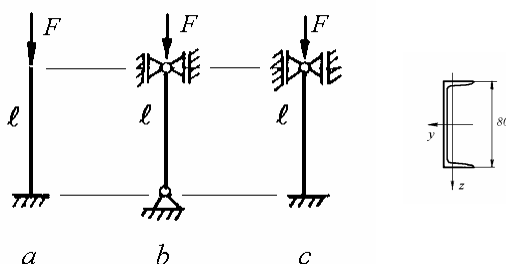


Fig. 13.8

b) Pentru cazul de rezemare din figura 13.8, b, lungimea de flambaj este $\ell_f = \ell = 1$ m. Rezultă

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{\min}} = \frac{1000}{13,3} = 75,2 < \lambda_0 = 105,$$

care arată că flambajul are loc în domeniul plastic, deci pentru calculul lui F_{cr} se utilizează formula (13.25). Coeficientul efectiv de siguranță la flambaj este

$$c_{f\text{ ef}} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{\sigma_f A}{F} = \frac{(304 - 1,12 \cdot 75,2) \cdot 1100}{8 \cdot 10^4} = 3,022 \cong c_f = 3,$$

deci bara este dimensionată corespunzător.

c) Pentru cazul de rezemare din figura 13.8, c, $\ell_f = 0,699\ell \cong 0,7$ m. Coeficientul de zveltețe este

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{\min}} = \frac{700}{13,3} = 52,6 < \lambda_1 = 60,$$

deci se face calculul la compresiune. Coeficientul de siguranță efectiv este

$$c_{f\text{ ef}} = \frac{\sigma_c A}{F} = \frac{240 \cdot 1100}{8 \cdot 10^4} = 3,3 > c_f = 3,$$

deci bara este ușor supradimensionată.

Exemplul 13.5

Să se dimensioneze bara rezemată și solicitată de o forță $F = 100 \text{ kN}$ ca în figurile 13.9, *a* și *b*, de lungime $\ell = 1 \text{ m}$, din OL37 de profil *I*, coeficientul de siguranță impus fiind $c_f = 3$.

Rezolvare

La OL37, $\sigma_c = 240 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_f = 304 - 1,12 \lambda \text{ N/mm}^2$, $\lambda_0 = 105$, $\lambda_1 = 60$ și $E = 210 \text{ GPa}$.

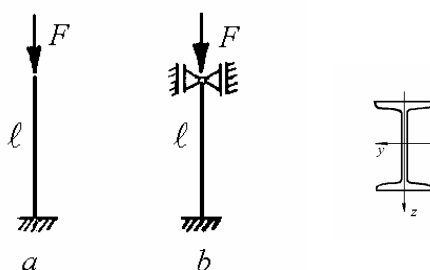


Fig. 13.9

a) Pentru cazul de rezemare din figura 13.9, *a*, lungimea de flambaj $\ell_f = 2\ell = 2 \text{ m}$.

Se presupune că flambajul are loc în domeniul elastic, utilizând formula (13.27)

$$I_{nec} = \frac{F \ell_f^2 c_f}{\pi^2 E} = \frac{10^5 \cdot 2000^2 \cdot 3}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 57,69 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Valoarea de mai sus este situată între $54,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, corespunzătoare profilului *I16* și $81,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, corespunzătoare profilului *I18* din Anexa 2a. Se alege profilul *I18* cu următoarele caracteristici: $A = 2790 \text{ mm}^2$, $I_{min} = 81,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, $i_{min} = 17,1 \text{ mm}$.

Se calculează coeficientul de zveltețe

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} = \frac{2000}{17,1} = 117 > \lambda_0 = 105.$$

Cazul fiind situat în domeniul elastic, dimensionarea pe baza formulei lui Euler (13.27) este corectă.

b) Pentru cazul de rezemare din figura 13.9, b , $\ell_f \cong 0,7 \ell = 0,7 \text{ m}$.

Utilizând formula (13.27) pentru domeniul flambajului elastic, rezultă

$$I_{nec} = \frac{F \ell_f^2 c_f}{\pi^2 E} = \frac{10^5 \cdot 700^2 \cdot 3}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 7,24 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Valoarea de mai sus este situată între $6,29 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, corespunzătoare profilului $I8$ și $12,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, corespunzătoare profilului $I10$ din Anexa 2a. Se alege profilul $I10$ pentru care: $A = 1060 \text{ mm}^2$, $I_{min} = 12,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, $i_{min} = 10,7 \text{ mm}$.

Se calculează coeficientul de zveltețe

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}} = \frac{700}{10,7} = 65,4 < \lambda_0 = 105,$$

cazul fiind situat în domeniul flambajului plastic.

Se verifică coeficientul de siguranță pentru flambajul plastic

$$c'_f = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{\sigma_f A}{F} = \frac{(304 - 1,12 \cdot 65,4) \cdot 1060}{10^5} = 2,44 < c_f = 3.$$

Se majorează dimensiunile secțiunii, trecând la următorul profil, $I12$, cu următoarele caracteristici $A = 1420 \text{ mm}^2$, $I_{min} = 21,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, $i_{min} = 12,3 \text{ mm}$.

Coeficientul de zveltețe este

$$\lambda' = \frac{\ell_f}{i_{min}} = \frac{700}{12,3} = 57,48 < \lambda_1 = 60,$$

în acest caz făcându-se calculul la compresiune.

Coeficientul de siguranță este

$$c''_f = \frac{\sigma_c A}{F} = \frac{240 \cdot 1420}{10^5} = 3,41 > c_f = 3.$$

13.6 Lungimea critică de flambaj

În descrierea fenomenului de flambaj s-a considerat că lungimea barei este invariabilă iar forța de compresiune axială aplicată static crește de la zero la valoarea critică.

Pentru a evidenția importanța zvelteții barei în fenomenul de flambaj se consideră forța de compresiune constantă și se modifică lungimea barei până la atingerea unei valori critice.

Fie bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt, cazul II din figura 13.4, din oțel OL37, de secțiune pătrată cu aria $A=100\text{ mm}^2$, solicitată de o forță $F=4\text{ kN}$. Tensiunile de compresiune din bară sunt $\sigma = \frac{F}{A} = 40\text{ N/mm}^2$, valoare relativ mică, mult sub limita de proporționalitate $\sigma_p = 120\text{ N/mm}^2$.

Dacă forța F se menține constantă (poate fi o greutate atașată la capătul superior al barei) și se mărește progresiv lungimea barei (bara poate fi un șurub iar încastrarea o piuliță lungă), starea critică (de echilibru indiferent) se atinge atunci când, conform relației (13.20), lungimea are valoarea

$$\ell_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{4F}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^4}{4 \cdot 4000 \cdot 12}} = 328\text{ mm}.$$

De notat că până flambează, deci pentru lungimi $\ell < 0,328\text{ m}$, bara este comprimată cu $\sigma = 40\text{ N/mm}^2$

La flambajul prin bifurcarea echilibrului, în momentul pierderii stabilității, tensiunea critică de flambaj este $\sigma_f = \sigma = 40\text{ N/mm}^2$, după care bara se îndoaie, forța F se deplasează lateral, rămânând verticală, deci acționând cu un braț tot mai mare, producând tensiuni suplimentare de încovoiere care pot duce la o nouă configurație de echilibru, cu deformații foarte mari sau chiar la ruperea barei.

După flambaj, deformațiile barei fiind mari, curbura liniei elastice a barei se calculează cu relația exactă

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-w'''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \frac{M}{EI}, \quad (13.28)$$

care conduce la o ecuație diferențială neliniară a cărei soluție conține integrale eliptice. Calculul postcritic depășește cadrul acestui curs.

13.7 Compresiunea excentrică a barelor zvelte

Se consideră bara din figura 13.10, a , solicitată la compresiune de forța F , aplicată cu o excentricitate e .

Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare este

$$M(x) = -F(\delta + e - w),$$

unde δ este săgeata în capătul barei, iar w - săgeata în secțiunea x .

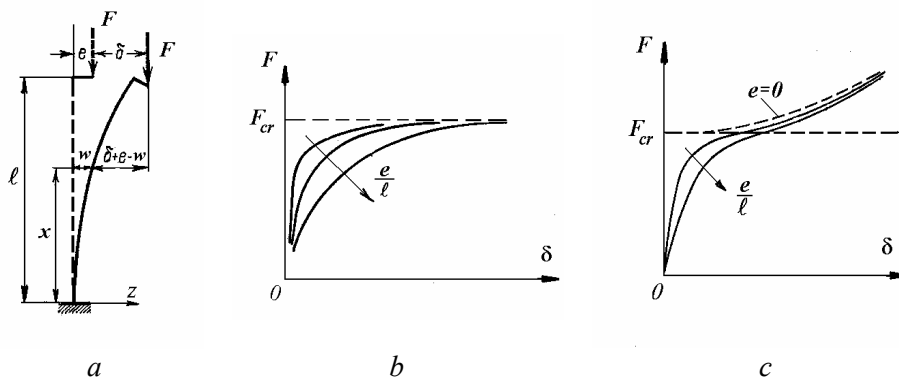


Fig. 13.10

Ecuția diferențială a liniei elastice a barei este

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -F(\delta + e - w),$$

sau

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = \alpha^2 (\delta + e),$$

unde s-a notat

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI}.$$

Soluția generală este

$$w(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \delta + e.$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită $x=0$, $w=0$ și $w'=0$. Rezultă $C_2 = -(\delta + e)$ și $C_1 = 0$, deci

$$w(x) = (\delta + e)(1 - \cos \alpha x).$$

Săgeata la capătul superior este $w(\ell) = \delta = (\delta + e)(1 - \cos \alpha \ell)$, deci

$$\delta = \frac{e(1 - \cos \alpha \ell)}{\cos \alpha \ell}. \quad (13.29)$$

Săgeata într-o secțiune oarecare a barei are expresia

$$w(x) = \frac{e}{\cos \alpha \ell} (1 - \cos \alpha x). \quad (13.30)$$

Se observă că $w \rightarrow \infty$ atunci când $\cos \alpha \ell = 0$, deci când $\alpha \ell = (2n-1)\pi/2$. Soluția de valoare minimă este $\alpha_1 \ell = \pi/2$, aceeași care a determinat forța critică (13.20). Rezultă că excentricitatea e nu modifică mărimea sarcinii critice de flambaj.

Săgeata (13.29) nu este proporțională cu forța F .

Înlocuind

$$\alpha \ell = \sqrt{\frac{F \ell^2}{EI}} = \pi \sqrt{\frac{F}{F_{cr}}}$$

în relația (13.29), se obține expresia săgeții δ în funcție de forța F

$$\delta = e \frac{1 - \cos\left(\pi \sqrt{F/F_{cr}}\right)}{\cos\left(\pi \sqrt{F/F_{cr}}\right)}, \quad (13.31)$$

reprezentată grafic în figura 13.10, *b*, pentru diferite valori e/ℓ . Între forță și deformație există o corespondență biunivocă.

Rezultă curbe cu alură hiperbolică, tinzând spre asimptota orizontală de ordonată $F = F_{cr}$. Dependența de e fiind liniară, curbele se pot deduce una din cealaltă, reducând δ în același raport cu e .

Pornind de la ecuația diferențială neliniară a liniei elastice (13.28), se obține aceeași valoare a forței critice de flambaj, dar deformația are o dependență neliniară de forța F . Conform unei formule aproximative stabilite de von Mises, pentru $F > F_{cr}$,

$$\delta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \ell \sqrt{\frac{F}{F_{cr}} - 1} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{F}{F_{cr}} - 1 \right) \right]. \quad (13.32)$$

Dacă se reprezintă grafic variația forței F cu săgeata δ (fig. 13.10, *c*), pentru $e = 0$, se obține o curbă de formă parabolică (desenată punctat), tangentă la orizontala $F = F_{cr}$. La bara comprimată excentric, curbele forță-deformație (desenate cu linii continue) au aceeași alură ca în figura 13.10, *b* pentru $F < F_{cr}$, apoi, în jurul valorii forței critice de flambaj deformațiile cresc foarte mult, tinzând asimptotic spre curba de ecuație (13.32). Acesta este flambajul prin divergență.

Forța F se poate reduce în axa barei la o forță F și un cuplu Fe . Dar în cazul de față, datorită dependenței neliniare între forță și deformații, nu se poate aplica principiul suprapunerii efectelor, adunând săgeata produsă de F cu săgeata produsă de cuplul Fe . Forța F nu produce doar compresiune ci și o încovoiere suplimentară, care nu se datorește cuplului Fe , conducând la relația neliniară (13.31).

13.8 Încovoierea barelor comprimate axial

În continuare se va prezenta o metodă pentru calculul aproximativ al deformațiilor la încovoiere ale barelor comprimate.

Se consideră o bară articulată la capete (fig. 13.11, *a*), încărcată cu o forță de compresie axială F și o sarcină transversală Q .

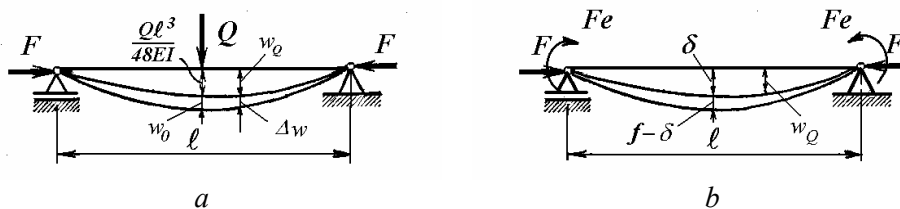


Fig. 13.11

Momentul încovoiitor într-o secțiune oarecare a barei este

$$M = M_Q + F w,$$

unde M_Q este momentul produs de forța transversală.

Săgeata se poate scrie ca sumă a două săgeți

$$w = w_Q + \Delta w,$$

unde w_Q este săgeata produsă de forța transversală în absența forței F , iar Δw este săgeata suplimentară produsă de forța F .

Ecuția diferențială a liniei elastice a barei este

$$E I \frac{d^2 w}{dx^2} = E I \frac{d^2 w_Q}{dx^2} + E I \frac{d^2 \Delta w}{dx^2} = -M_Q - F w.$$

Întrucât

$$E I \frac{d^2 w_Q}{dx^2} = -M_Q.$$

rezultă că

$$E I \frac{d^2 \Delta w}{dx^2} = -F w. \quad (13.33)$$

Se alege o formă aproximativă pentru deformata barei sub acțiunea forței de compresiune F , de exemplu

$$\Delta w = w_0 \sin \frac{\pi x}{\ell}.$$

Se calculează expresia

$$\frac{d^2 \Delta w}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{\ell^2} w_0 \sin \frac{\pi x}{\ell} = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \Delta w$$

care, înlocuită în ecuația (13.33), conduce la

$$\frac{\pi^2}{\ell^2} (w - w_Q) = \frac{F w}{EI}.$$

Rezultă săgeata barei

$$w = \frac{w_Q}{1 - \frac{F \ell^2}{\pi^2 EI}} = \frac{w_Q}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad (13.34)$$

unde F_{cr} este forța critică de flambaj.

Se observă că atunci când $F \rightarrow F_{cr}$, deci pe măsură ce forța se apropie de valoarea forței critice de flambaj, numitorul expresiei (13.34) tinde spre zero, deci săgeata $w \rightarrow \infty$. Relația între forța F și săgeata w este neliniară, dar pentru orice valoare a forței F săgeata are o valoare bine precizată, fără a conține o amplitudine nedeterminată, ca în cazul ideal al echilibrului indiferent.

Dacă la bara supusă la compresiune excentrică sarcina transversală se înlocuiește cu momentele concentrate $F e$ aplicate la capetele barei (fig. 13.11, *b*), momentul $M_Q = F e$ este constant în lungul barei. Săgeata produsă de acest moment are expresia

$$w_Q = \frac{F e}{2 EI} x(\ell - x)$$

având valoarea maximă la mijlocul barei

$$\delta = \frac{F e \ell^2}{8 EI}.$$

Rezultă deplasarea în dreptul mijlocului barei

$$f = w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F e \ell^2}{8EI} \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}. \quad (13.35)$$

Relația (13.35) se mai scrie sub forma

$$\frac{f}{F} = \frac{1}{F_{cr}} \left(f + \frac{\pi^2}{8} e \right). \quad (13.36)$$

În figura 13.12 s-a reprezentat grafic raportul $\frac{f}{F}$ în funcție de săgeata f .

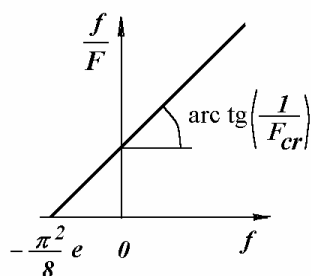


Fig. 13.12

Rezultă o linie dreaptă care intersectează axa orizontală în punctul de abscisă $\left(-\frac{\pi^2}{8} e\right)$ și are panta egală cu inversul forței critice de flambaj.

Construcția grafică este cunoscută sub numele de *diagrama lui R. V. Southwell* (1932), fiind utilizată la determinarea experimentală a sarcinii critice de flambaj.

14.

CILINDRI CU PEREȚI GROȘI ȘI DISCURI ÎN ROTAȚIE

Calculul tensiunilor și deformațiilor la tuburi cu pereți groși are aplicații practice la recipientele cu presiune interioară mare din instalațiile petro-chimice, la cilindrii preselor hidraulice și țevile tunurilor, la țevile de răcire ale reactoarelor nucleare, la țevile pereților membrană ai generatoarelor de abur, la discuri și arbori în rotație cu turații relativ mari.

În cazul cilindrilor circulari încărcăți și/sau încălziți axial simetric, tensiunile normale și deformațiile radiale într-un punct depind de o singură variabilă - raza în punctul respectiv. La tuburi închise la capete sau încălzite neuniform pe grosime, tensiunea normală longitudinală este constantă. Secțiunile transversale plane rămân plane și după aplicarea solicitării, fiind exclusă încovoierea sau răsucirea tubului. Tensiunile maxime apar totdeauna în peretele interior al tubului, în direcție circumferențială. Situația este similară cu cea de la bare curbe, cu diferența că în cazul tuburilor și discurilor nu se neglijează tensiunile radiale.

14.1 Tuburi cu presiune interioară și exterioară

Un cilindru circular de grosime constantă, supus acțiunii presiunii interioare și exterioare uniform distribuite, se deformează simetric în raport cu axa.

Într-un tub liber la capete, tensiunile normale longitudinale sunt nule. Un inel izolat din tub, prin două plane relativ apropiate, perpendiculare pe axă, este solicitat la o stare plană de tensiuni (cu excepția zonelor din vecinătatea capetelor). Într-un tub închis la capete, prin capace, apar și tensiuni longitudinale. Dacă presiunile sunt constante în lungul tubului, atunci tensiunile axiale sunt constante și ușor de calculat. Se poate considera că un inel izolat la o oarecare distanță de capetele tubului este solicitat la o stare plană de deformații specifice sau cel puțin are deformații specifice longitudinale constante.

Calculul tensiunilor și deformațiilor în tubul cu pereți groși este o problemă static nedeterminată, la rezolvarea căreia trebuie utilizate patru tipuri de relații: ecuații de echilibru, relații între deformații specifice și deplasări, relații între tensiuni și deformații specifice și condiții la limită. Problema a fost rezolvată de G. Lamé în 1852.

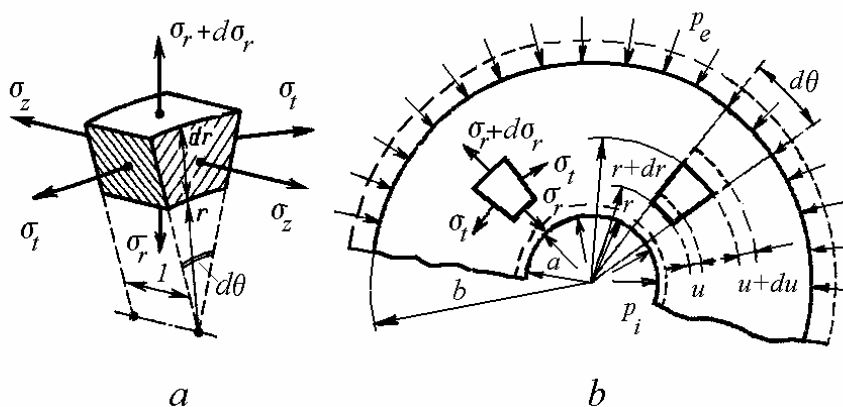


Fig. 14.1

Ecuția de echilibru

Din inelul de grosime egală cu unitatea se detașează un element prin două plane axiale și două suprafețe cilindrice concentrice infinit vecine (fig. 14.1, a). Datorită simetriei, pe fețele acestui element nu acționează tensiuni tangențiale (de forfecare). Fie σ_t tensiunea normală circumferențială și σ_r tensiunea normală radială. Aceasta din urmă variază cu raza r și pe suprafața exterioară este $\sigma_r + d\sigma_r$. Ecuația de proiecții a forțelor pe bisectoarea unghiului $d\theta$ (fig. 14.1, a) se scrie, aproximând $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$,

$$\sigma_r r d\theta + 2\sigma_t dr \frac{d\theta}{2} - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta = 0,$$

$$\sigma_t = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr},$$

sau

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot r) = \sigma_t. \quad (14.1)$$

Relații între deformații specifice și deplasări

Dacă u este deplasarea radială a unui punct de pe suprafața cilindrului de rază r (fig. 14.1, b), atunci deplasarea unui punct de pe suprafața cilindrului de rază $r + dr$ este $u + (du/dr)dr$.

Alungirea radială este egală cu diferența deplasărilor capetelor segmentului dr , deci du . Alungirea specifică radială se obține împărțind alungirea radială la lungimea inițială dr

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (14.2)$$

Cercul de rază r devine cercul de rază $r + u$, deci alungirea pe direcție circumferențială este $2\pi(r + u) - 2\pi r = 2\pi u$. Prin împărțire la $2\pi r$ se obține alungirea specifică circumferențială

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}. \quad (14.3)$$

Eliminând deplasarea u între relațiile (14.2) și (14.3) se obține ecuația de compatibilitate (continuitate)

$$\frac{d}{dr}(\varepsilon_t \cdot r) = \varepsilon_r. \quad (14.4)$$

Relații între tensiuni și deformații specifice

Considerând $\sigma_z = 0$, legea lui Hooke pentru starea plană de tensiuni se scrie

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_t), \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_r). \quad (14.5)$$

Înlocuind expresiile (14.5) în relația (14.4) și ținând cont de (14.1) se obține a doua relație între tensiuni

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t \cdot r) = \sigma_r. \quad (14.6)$$

Eliminând σ_t între relațiile (14.1) și (14.6), se obține ecuația diferențială de tip Euler

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (14.7)$$

Soluția ecuației (14.7) are forma

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad (14.8)$$

unde A și B sunt constante de integrare.

Înlocuind expresia (14.8) în (14.1) rezultă tensiunile circumferențiale

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2}. \quad (14.9)$$

Dacă $\sigma_z = 0$, deformația specifică longitudinală este constantă

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_t) = \text{const.},$$

deci secțiunile plane rămân plane și după deformarea cilindrului.

Dacă cilindrul este închis la capete, forța axială este $N = p_i \pi a^2 - p_e \pi b^2$, deci tensiunile longitudinale au valoarea constantă

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2}. \quad (14.10)$$

Deplasarea radială a unui punct situat la raza r este, conform (14.3),

$$u = \varepsilon_t r = \frac{r}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)], \quad (14.11)$$

sau, ținând cont de relațiile (14.8) și (14.9),

$$u = A \frac{1-\nu}{E} r + B \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r} - \frac{\nu \sigma_z}{E} r. \quad (14.12)$$

Condițiile la limită

Constantele A și B se obțin din condiția ca pe suprafața interioară și cea exterioară a cilindrului, tensiunea radială σ_r să fie egală și de semn contrar presiunilor p_i și respectiv p_e : la $r = a$, $\sigma_r = -p_i$, iar la $r = b$, $\sigma_r = -p_e$.

Rezultă

$$A = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{(p_i - p_e) a^2 b^2}{b^2 - a^2}, \quad (14.13)$$

care înlocuite în (14.8) și (14.9) conduc la expresiile tensiunilor

$$\sigma_t, \sigma_r = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \pm \frac{1}{r^2} \frac{(p_i - p_e) a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (14.14)$$

Se observă că

$$\sigma_r + \sigma_t = 2A = \text{const.}, \quad \sigma_z = A.$$

Deplasarea radială este

$$u = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \frac{1-\nu}{E} r + \frac{(p_i - p_e) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r} - \frac{\nu \sigma_z}{E} r. \quad (14.15)$$

Relațiile (14.14) și (14.15) se numesc *formulele lui Lamé*, fiind valabile și atunci când presiunile p_i și p_e variază liniar în lungul tubului.

14.1.1 Tub cu presiune interioară

Se consideră un tub cu pereți groși, supus numai la presiune interioară p_i , la care tensiunile longitudinale $\sigma_z = 0$.

Înlocuind $p_e = 0$ în relațiile (14.14), se obțin expresiile tensiunilor din tub

$$\sigma_t, \sigma_r = p_i \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 \pm \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (14.16)$$

Pe suprafața interioară, pentru $r = a$, tensiunile au valorile

$$\sigma_{t_1} = p_i \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{r_1} = -p_i. \quad (14.17)$$

Pe suprafața exterioară, pentru $r = b$, se obține

$$\sigma_{t_2} = p_i \frac{2a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{r_2} = 0. \quad (14.18)$$

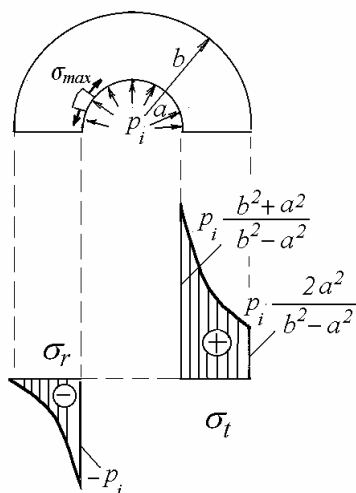


Fig. 14.2

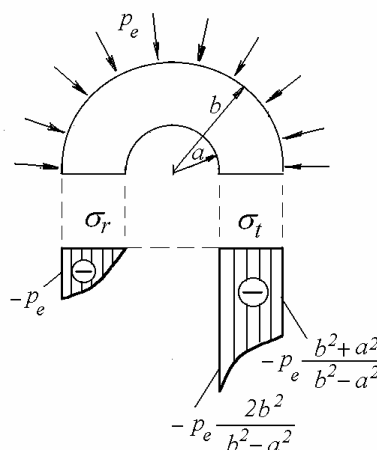


Fig. 14.3

În figura 14.2 se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor σ_t și σ_r în lungul razei. Tensiunile maxime apar pe suprafața interioară a tubului.

Tensiunea echivalentă la interior, conform teoriei a *IIIa* de rezistență (10.3), este

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} = p_i \frac{2b^2}{b^2 - a^2}. \quad (14.19)$$

Din condiția ca tensiunea echivalentă să fie mai mică sau egală cu rezistența admisibilă σ_a , rezultă relația de dimensionare

$$\frac{b}{a} \geq \sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_a - 2p_i}}. \quad (14.20)$$

Pentru $p_i = \sigma_a/2$, raportul razelor $b/a \rightarrow \infty$, tensiunea echivalentă este mai mare ca rezistența admisibilă σ_a chiar pentru grosimi foarte mari ale tubului, deci apar deformații plastice. Problema este studiată în Capitolul 16.

Pentru solicitări în domeniul elastic, conform teoriei a *IIIa* de rezistență, presiunea interioară p_i nu poate depăși valoarea $\sigma_c/2$, unde σ_c este limita de curgere a materialului tubului. În continuare se arată că fretajul permite creșterea presiunii interioare până la valori apropiate de σ_c .

Deplasarea radială a unui punct de pe suprafața interioară a tubului este

$$u|_{r=a} = \frac{a p_i}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \nu \right). \quad (14.21)$$

14.1.2 Tub cu presiune exterioară

Se consideră un tub cu pereți groși, supus numai la presiune exterioară p_e , la care tensiunile longitudinale $\sigma_z = 0$.

Înlocuind $p_i = 0$ în relațiile (14.14), se obțin expresiile tensiunilor

$$\sigma_t, \sigma_r = -p_e \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 \pm \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (14.22)$$

Pe suprafața interioară, pentru $r = a$, se obține

$$\sigma_{t_1} = -p_e \frac{2b^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{r_1} = 0. \quad (14.23)$$

Pe suprafața exterioară, pentru $r = b$, tensiunile au valorile

$$\sigma_{t_2} = -p_e \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{r_2} = -p_e. \quad (14.24)$$

În figura 14.3 se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor σ_t și σ_r în lungul razei. Tensiunile circumferențiale maxime apar pe suprafața interioară a tubului și sunt de compresiune locală, ceea ce constituie un avantaj.

Dacă se micșorează diametrul interior, $a \rightarrow 0$, tensiunile circumferențiale $\sigma_{t_2} \rightarrow -p_e$ și $\sigma_{t_1} \rightarrow -2p_e$. Pentru cilindrul fără gaură $\sigma_{t_1} = -p_e$, deci gaura lucrează ca un concentrator de tensiuni.

Deplasarea radială a unui punct de pe suprafața exterioară a tubului este

$$u|_{r=b} = -\frac{b p_e}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu \right). \quad (14.25)$$

14.2 Cilindri fretați

La un tub cu pereți groși, tensiunile circumferențiale au valori maxime la interior. Presiunea interioară produce tensiuni locale de întindere, în timp ce presiunea exterioară produce tensiuni locale de compresiune, deci la tuburi supuse la presiune interioară tensiunile circumferențiale scad dacă se aplică și o presiune exterioară. Procedeele de numește *fretaj* și poate fi realizat în mai multe moduri.

O metodă simplă constă în înfășurarea unui cablu tensionat sau unei table subțiri tensionate, în mai multe straturi, pe suprafața exterioară a tubului. În metoda clasică, peste tubul solicitat la presiune interioară se montează cu strângere un tub exterior, care inițial are diametrul interior mai mic decât diametrul exterior al tubului presat. Asamblarea se face încălzind cilindrul exterior sau răcind cilindrul interior, montând apoi un cilindru peste celălalt. După egalizarea temperaturilor, pe suprafața de contact apare o *presiune de fretaj* p_c .

În continuare se calculează tensiunile de fretaj în doi cilindri de aceeași lungime (fig. 14.4), pentru care presiunea de fretaj este uniform distribuită pe suprafețele de contact. Înainte de asamblare, cilindrul interior are raza interioară a și raza exterioară $b + \delta$, în timp ce cilindrul exterior are raza interioară b și raza exterioară c . Mărimea δ se numește *grosime de fretaj* sau *interferență radială*.

După montaj, datorită presiunii de fretaj, cilindrul exterior este dilatat iar cilindrul interior este comprimat. Suma deplasărilor radiale ale suprafețelor celor doi cilindri este egală cu diferența razelor inițiale δ

$$-u_1 + u_2 = \delta. \quad (14.26)$$

Pentru cilindrul exterior, se fac înlocuirile $p_i \rightarrow p_c$, $a \rightarrow b$ și $b \rightarrow c$. Din relația (14.24) se obține

$$u_2 = \frac{b p_c}{E_2} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu_2 \right). \quad (14.27)$$

Pentru cilindrul interior, înlocuind $p_e \rightarrow p_c$ în relația (14.25), se obține

$$u_1 = -\frac{b p_c}{E_1} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_1 \right). \quad (14.28)$$

În relațiile (14.27) și (14.28), considerând materiale diferite, s-a utilizat indicele 1 pentru cilindrul interior și indicele 2 pentru cilindrul exterior.

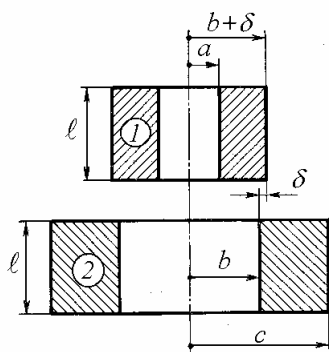


Fig. 14.4

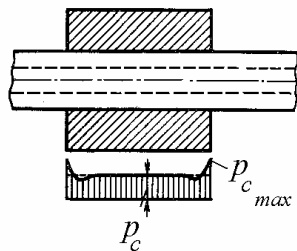


Fig. 14.5

Înlocuind expresiile (14.27) și (14.28) în condiția (14.26), se obține formula presiunii de fretaj

$$p_c = \frac{\delta}{b K}, \quad (14.29)$$

unde s-a notat

$$K = \frac{1}{E_1} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu_2 \right). \quad (14.30)$$

Pentru cilindri din materiale identice

$$K = \frac{1}{E} \frac{2b^2(c^2 - a^2)}{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}. \quad (14.31)$$

Dacă cilindrul interior este un arbore plin, din material diferit de cel al cilindrilor exterior, atunci

$$K = \frac{1}{E_1} (1 - \nu_1) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu_2 \right), \quad (14.32)$$

iar dacă cilindrii sunt din același material

$$K = \frac{1}{E} \frac{2c^2}{c^2 - b^2}. \quad (14.33)$$

Dacă cei doi cilindri au lungimi diferite, atunci presiunea de fretaj este distribuită neuniform (fig. 14.5). Valoarea medie depinde de raportul între lungimea cilindrului scurt și diametrul $2b$, în timp ce la capetele cilindrului scurt apare o creștere locală a presiunii de contact care duce la o concentrare a tensiunilor.

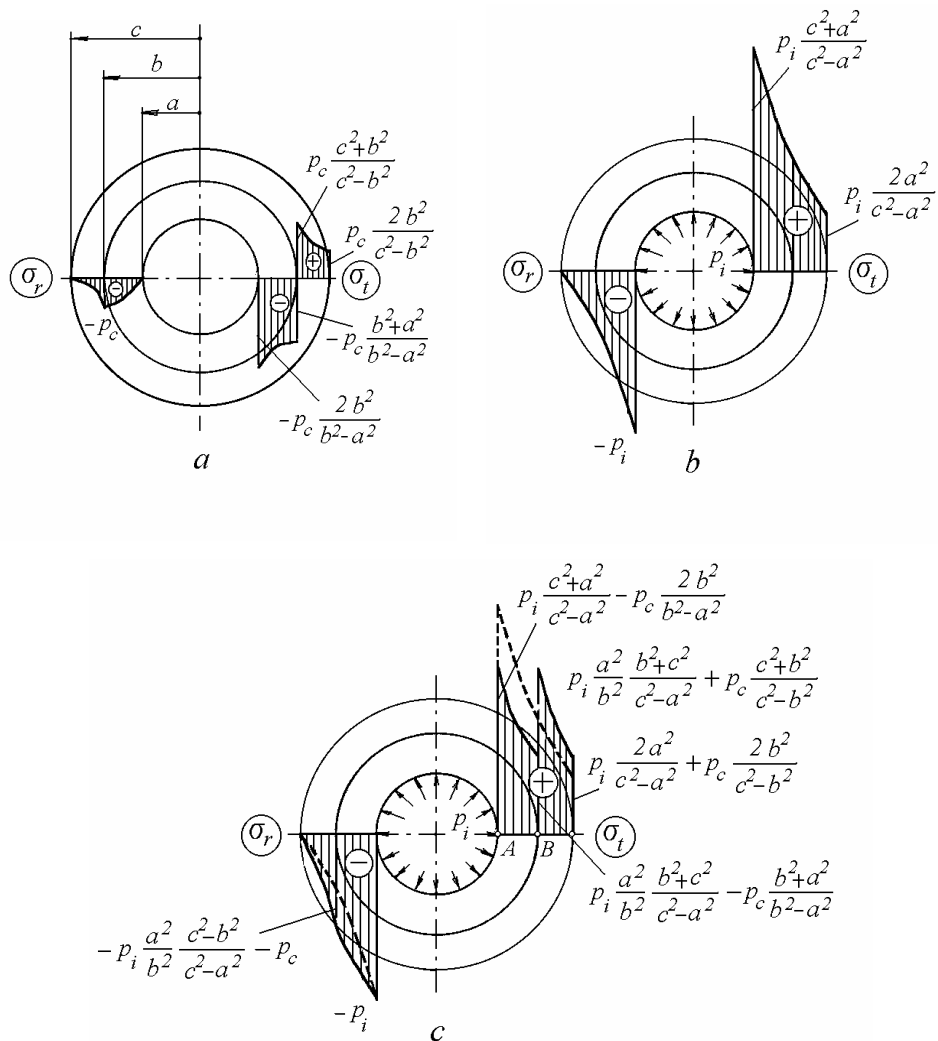


Fig. 14.6

În figura 14.6, *a* se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor σ_t și σ_r în lungul razei tubului fretat, datorite numai presiunii de fretaj. Se observă că tensiunile maxime apar la interiorul cilindrului interior.

Dacă tubul fretat este supus la presiune interioară, atunci la tensiunile produse de fretaj se adaugă tensiunile din figura 14.6, *b*. Tensiunile rezultante însumate au diagramele de variație prezentate în figura 14.6, *c*. Se remarcă efectul favorabil al fretajului, care micșorează tensiunile circumferențiale mari de la interiorul tubului și modifică nesemnificativ tensiunile radiale.

În practică, grosimea de fretaj se alege de ordinul a $1\mu\text{m}$ la fiecare 1 mm diametru, dar să nu producă tensiuni mai mari decât rezistența admisibilă.

Valoarea optimă a presiunii de fretaj (și a grosimii de fretaj corespunzătoare) se poate obține din condiția egalității tensiunilor echivalente pe suprafețele interioare ale celor doi cilindri. Valoarea optimă a razei suprafeței de contact se obține din condiția de minimum a tensiunii echivalente. Problema a fost rezolvată de A. V. Gadolin în 1861 și este prezentată în exemplul următor.

Exemplul 14.1

Să se determine relația între razele *a*, *b* și *c* ale unui tub fretat din oțel și diferența δ , înainte de fretaj, a razelor suprafețelor cilindrice în contact, pentru ca tubul fretat să aibă o rezistență maximă la solicitarea prin presiune interioară, în regim elastic, conform teoriei a *IIIa* de rezistență. Să se determine presiunea de fretaj în funcție de presiunea interioară din tub. Aplicație numerică: $\sigma_a = 500 \text{ MPa}$, $p_i = 300 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$.

Rezolvare

Conform teoriei a *IIIa* de rezistență (10.3), tensiunea echivalentă în punctul *A* (fig. 14.6, *c*) este

$$\sigma_{ech_A} = \sigma_1 - \sigma_3 = p_i \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - p_c \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - (-p_i), \quad (14.34)$$

iar tensiunea echivalentă în punctul *B* al cilindrului exterior este

$$\sigma_{ech_B} = p_i \frac{a^2}{c^2 - a^2} \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \right) - p_c \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} - p_i \frac{a^2}{c^2 - a^2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) - (-p_c), \quad (14.35)$$

Condiția de optimum

$$\sigma_{ech_A} = \sigma_{ech_B} \quad (14.36)$$

se aduce la forma

$$p_i \frac{c^2}{b^2} \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2} = p_c \left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \right), \quad (14.37)$$

de unde rezultă presiunea de fretaj p_c în funcție de presiunea interioară p_i .

Înlocuind p_c din formula (14.29) și utilizând notația (14.31) se obține grosimea de fretaj corespunzătoare presiunii interioare de lucru a tubului fretat

$$\delta = \frac{2p_i}{E} \frac{bc^2(b^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2) + b^2(c^2 - b^2)}, \quad (14.38)$$

Dacă se înlocuiește presiunea de fretaj din egalitatea (14.37) în expresia (14.34) se obține

$$\sigma_{ech_A} = p_i \frac{2b^2c^2}{c^2(b^2 - a^2) + b^2(c^2 - b^2)}. \quad (14.39)$$

Din condiția de minimum

$$\frac{\partial \sigma_{ech_A}}{\partial b} = 0, \quad (14.40)$$

se obține valoarea optimă a razei suprafeței de contact

$$b = \sqrt{ac}. \quad (14.41)$$

Înlocuind valoarea lui b din relația (14.41) în expresia (14.39) rezultă

$$\sigma_{ech_{A \min}} = p_i \frac{c}{c - a}. \quad (14.42)$$

Comparând expresiile (14.42) și (14.19) se observă că fretajul conduce la o scădere considerabilă a tensiunii echivalente pe suprafața interioară a tubului cu presiune interioară. Raportul tensiunilor echivalente, cu și fără fretaj, este

$$\frac{\sigma_{ech_A}}{\sigma_{ech_1}} = \frac{c + a}{2c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{c} \right). \quad (14.43)$$

Dacă $a \rightarrow 0$, deci pentru un cilindru interior plin, raportul (14.43) este egal cu 1/2. Pentru tuburi cu pereți subțiri, adică pentru $a \approx c$, fretajul nu are efect.

Înlocuind valoarea (14.41) în egalitatea (14.37), se obține presiunea de fretaj pentru o presiune interioară dată

$$p_c = \frac{p_i}{2} \frac{c - a}{c + a}, \quad (14.44)$$

iar din formula (14.38) rezultă grosimea de fretaj în funcție de presiunea interioară

$$\delta = \frac{p_i}{E} \sqrt{ac}, \quad (14.45)$$

deci presiunea de fretaj în funcție de grosimea de fretaj are expresia

$$p_c = \frac{E \delta}{2 \sqrt{ac}} \frac{c-a}{c+a}. \quad (14.46)$$

Dacă se egalează tensiunea echivalentă (14.42) cu rezistența admisibilă, atunci se obține presiunea interioară maximă admisibilă pentru solicitări în domeniul elastic

$$p_{i_{max}} = \left(1 - \frac{a}{c}\right) \sigma_a. \quad (14.47)$$

Pentru $a = 0$ (cilindru interior plin) se obține $p_{i_{max}} = \sigma_a$.

Dacă se impune presiunea interioară maximă p_i și rezistența admisibilă σ_a , atunci din (14.47) se obține relația de dimensionare bazată pe teoria a III-a de rezistență

$$\frac{c}{a} \geq \frac{\sigma_a}{\sigma_a - p_i}. \quad (14.48)$$

Pentru $b = \sqrt{ac}$, la cilindru fretat nesolicitat la presiune interioară (fig. 14.6, a), tensiunile circumferențiale în B (pe suprafața de contact) sunt egale și de semne contrare în cei doi cilindri.

Relațiile de mai sus sunt valabile pentru un tub deschis la ambele capete și atunci când cilindru exterior se montează peste cel interior fără preîntindere.

Pentru $\sigma_a = 500$ MPa și $p_i = 300$ MPa din condiția (14.48) rezultă $c/a = 2,5$ iar din formula (14.44) se obține $p_c = 64$ MPa. Pentru $E = 210$ GPa din (14.45) rezultă $\delta/2b \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$.

Exemplul 14.2

Să se calculeze tensiunile într-un tub fretat cu $a = 100$ mm, $b = 150$ mm, $c = 225$ mm, $\delta = 0,15$ mm, $p_i = 210$ MPa, $E = 210$ GPa.

Rezolvare

Presiunea de fretaj (14.29) sau (14.44) este $p_c = 40,38$ MPa. Diagramele tensiunilor sunt prezentate în figura 14.7.

La cilindrul fretat nesolicitat (fig. 14.6, a)

$$\sigma_{t_{1A}} = -p_c \frac{2b^2}{b^2 - a^2} = -3,6 p_c = -145,38 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{t_{1B}} = -p_c \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = -2,6 p_c = -105 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{t_{2B}} = p_c \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} = 2,6 p_c = 105 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{t_{2C}} = p_c \frac{2b^2}{c^2 - b^2} = 1,6 p_c = 64,61 \text{ MPa}.$$

Tensiunile datorite presiunii interioare (fig. 14.6, b) sunt

$$\sigma_{t_A} = p_i \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} = 1,49 p_i = 313,38 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{t_C} = p_i \frac{2a^2}{c^2 - a^2} = 0,49 p_i = 103,38 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{t_B} = p_i \frac{a^2 b^2 + c^2}{b^2 c^2 - a^2} = 0,8 p_i = 168 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{r_B} = -p_i \frac{a^2 c^2 - b^2}{b^2 c^2 - a^2} = -0,307 p_i = -64,61 \text{ MPa}.$$

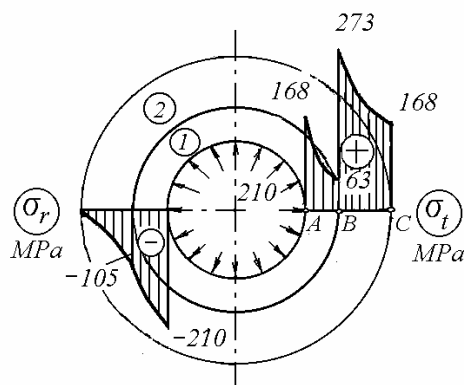


Fig. 14.7

Tensiunile totale (fig. 14.6, c și 14.7) au valorile

$$\bar{\sigma}_{t_{1A}} = \sigma_{t_{1A}} + \sigma_{t_A} = 168 \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{t_{1B}} &= \sigma_{t_{1B}} + \sigma_{t_B} = 63 \text{ MPa}, \\ \bar{\sigma}_{t_{2B}} &= \sigma_{t_{2B}} + \sigma_{t_B} = 273 \text{ MPa}, \\ \bar{\sigma}_{t_{2C}} &= \sigma_{t_{2C}} + \sigma_{t_C} = 168 \text{ MPa}, \\ \bar{\sigma}_{r_{1B}} &= \bar{\sigma}_{r_{2B}} = \sigma_{r_B} - p_C = -105 \text{ MPa}, \\ \bar{\sigma}_{r_{1A}} &= -p_i = -210 \text{ MPa}, \quad \bar{\sigma}_{r_{1C}} = 0.\end{aligned}$$

Tensiunile echivalente maxime sunt

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ech_A} &= \bar{\sigma}_{t_{1A}} - \bar{\sigma}_{r_{1A}} = 168 - (-210) = 378 \text{ MPa}, \\ \bar{\sigma}_{ech_B} &= \bar{\sigma}_{t_{2B}} - \bar{\sigma}_{r_{2B}} = 273 - (-105) = 378 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

14.3 Tensiuni termice în cilindri cu pereți groși

În continuare se consideră cilindri cu pereți groși supuși unui regim termic staționar, în care temperatura variază pe grosimea peretelui dar se consideră constantă în orice secțiune transversală în lungul tubului. Tensiunile termice sunt generate de încălzirea neuniformă. Dacă variația temperaturii este constantă în lungul razei tubului, nu apar tensiuni termice. Tensiunile termice în tuburi cu pereți groși au fost studiate prima dată de J. M. C. Duhamel (1838).

14.3.1 Distribuția temperaturii

Legea conducției termice (J. Fourier, 1822) se scrie sub forma

$$Q = k \frac{A}{L} \Delta t, \quad (14.49)$$

unde Q este fluxul termic, W , k este conductivitatea termică a materialului, $W/m \cdot K$, A este aria suprafeței de conducție, m^2 , L - lungimea traseului de conducție, m , și Δt - variația temperaturii pe traseul de conducție, K .

În cazul unui inel de grosime egală cu unitatea, decupat din tub prin două suprafețe cilindrice coaxiale de rază r , respectiv $r + dr$, se calculează $A = 2\pi r \cdot 1$, $L = dr$, deci formula (14.49) devine

$$Q = -k \frac{2\pi r}{dr} dt. \quad (14.50)$$

Presupunând $Q = const.$ și $k = const.$, relația (14.50) se mai scrie

$$r \frac{dt}{dr} = -\frac{Q}{2\pi k} = \text{const.} = c_1, \quad dt = c_1 \frac{dr}{r},$$

de unde rezultă temperatura la raza r

$$t = c_1 \int \frac{dr}{r} + c_2 = c_1 \ln r + c_2. \quad (14.51)$$

Se subînțelege că temperaturile t sunt de fapt diferențe între temperatura reală și o temperatură de referință t_o , a mediului ambiant.

Dacă se notează t_a - temperatura peretelui interior și t_b - temperatura peretelui exterior, din condițiile $t|_{r=a} = t_a$, $t|_{r=b} = t_b$, rezultă

$$t = t_b + \frac{t_a - t_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b}. \quad (14.52)$$

Pentru studiul tensiunilor termice, primul termen din relația (14.52) se poate neglija, deoarece corespunde încălzirii uniforme, care nu produce tensiuni termice. De aceea, în continuare se va considera următoarea distribuție a temperaturii în lungul razei

$$t = \frac{T}{\ln(a/b)} \ln \frac{r}{b}, \quad T = t_a - t_b. \quad (14.53)$$

Dacă fluxul de căldură este de la interior spre exterior ($T > 0$), atunci peretele interior încălzit mai puternic tinde să se dilate, dilatând straturile exterioare ale tubului. Peretele exterior se opune, producând comprimarea straturilor interioare ale tubului. Rezultă dilatare la exterior și comprimare la interior.

14.3.2 Tensiuni termice în cilindri circulari lungi

Se consideră un cilindru circular lung, solicitat longitudinal astfel încât secțiunile transversale să rămână plane.

Ecuțiile (14.1)-(14.4) rămân valabile. Relațiile constitutive (14.5) se modifică astfel

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)] + \alpha t, \quad (14.54)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] + \alpha t, \quad (14.55)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] + \alpha t. \quad (14.56)$$

În general, pentru temperaturi sub $300^{\circ}C$ se poate considera că modulul de elasticitate $E = const.$

Relația (14.56) se mai scrie

$$\sigma_z = E\varepsilon_z + \nu(\sigma_r + \sigma_t) - E\alpha t. \quad (14.56, a)$$

Considerând $\varepsilon_z = const.$, rezultă

$$\frac{d\varepsilon_z}{dr} = 0. \quad (14.57)$$

Înlocuind expresiile (14.54), (14.55) și (14.56, a) în ecuația de compatibilitate (14.4) și ținând cont de (14.1) și (14.57) se obține a doua relație între tensiuni

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t \cdot r) - \sigma_r = -\frac{E\alpha r}{1-\nu} \cdot \frac{dt}{dr}. \quad (14.58)$$

Eliminând σ_t între relațiile (14.1) și (14.58), se obține ecuația diferențială de ordinul doi, de tip Euler

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{1}{r} \frac{dt}{dr}. \quad (14.59)$$

Înlocuind distribuția de temperatură (14.53) în membrul drept, se obține

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{E\alpha T}{(1-\nu)\ln(a/b)} \frac{1}{r^2}. \quad (14.59, a)$$

Soluția ecuației (14.59, a) are forma

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha T}{2(1-\nu)\ln(a/b)} \ln \frac{r}{b}, \quad (14.60)$$

Constantele de integrare A și B se determină din condițiile la limită. Dacă presiunile exterioare sunt nule, atunci la $r = a$, $\sigma_r = 0$ și la $r = b$, $\sigma_r = 0$.

Rezultă

$$A = -\frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \frac{a^2}{b^2 - a^2}, \quad B = -\frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (14.61)$$

Înlocuind constantele (14.61) în relația (14.60) se obține formula tensiunilor radiale

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \left[-\frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} + \frac{(b^2 - r^2)a^2}{(b^2 - a^2)r^2} \right]. \quad (14.62)$$

Din relația (14.1) se obține expresia tensiunilor circumferențiale

$$\sigma_t = \frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \left[\frac{1 - \ln(b/r)}{\ln(b/a)} - \frac{(b^2 + r^2)a^2}{(b^2 - a^2)r^2} \right]. \quad (14.63)$$

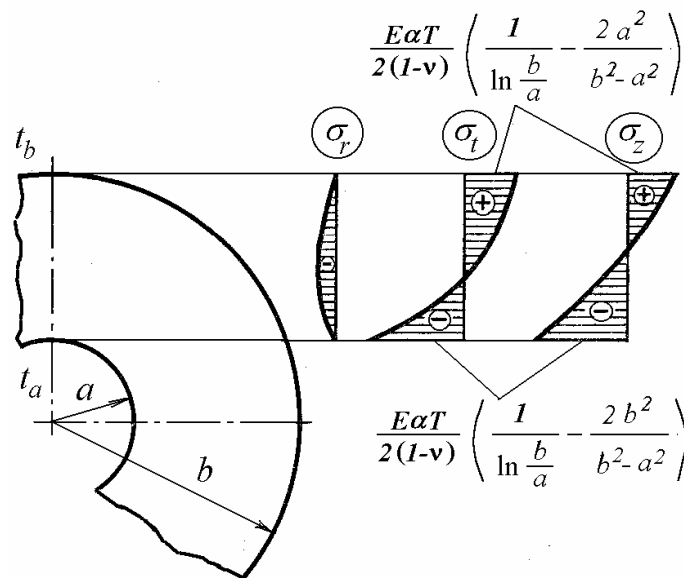


Fig. 14.8

Pentru determinarea expresiei tensiunilor longitudinale, se calculează întâi deformațiile specifice longitudinale. Se pune condiția ca forța axială să fie nulă

$$N = \int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = 0. \quad (14.64)$$

Înlocuind în (14.64) expresia lui σ_z (14.56, a), efectuând integrarea și ținând cont de (14.57), (14.62) și (14.63) se obține

$$\varepsilon_z = -\alpha T \left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2 \ln(b/a)} \right]. \quad (14.65)$$

Din formula (14.56, a) se obține apoi expresia tensiunilor longitudinale

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \left[\frac{1 - 2\ln(b/r)}{\ln(b/a)} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \right]. \quad (14.66)$$

Relațiile (14.62), (14.63) și (14.66) au fost stabilite de R. Lorenz în 1907, considerând temperatura pe suprafața exterioară nulă, $t_b = 0$, deci $T = t_a$, temperatura pe suprafața interioară a cilindrului.

În figura 14.8 se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor σ_r , σ_t și σ_z în lungul razei, pentru $T > 0$. Se observă că tensiunile maxime apar pe suprafața interioară a tubului, dar sunt de compresiune locală. Coșurile de fum din cărămidă, piatră sau beton, încălzite la interior, pot avea fisuri pe suprafața exterioară, solicitată la întindere locală.

Exemplul 14.3

Să se determine tensiunile de la interiorul unui tub cu $b = 3a$, $T = 40^\circ C$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\nu = 0,3$.

Rezolvare

Din relațiile (14.62), (14.63) și (14.66) se obține $\sigma_r = 0$ și

$$\sigma_t = \sigma_z = \frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \left[\frac{1}{\ln(b/a)} - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right] = -96,5 \text{ MPa},$$

deci valori relativ mari, chiar pentru o diferență relativ mică de temperatură.

14.4 Discuri de grosime constantă, în rotație

Într-un disc în rotație, forțele masice datorite accelerației centripete produc tensiuni. Aplicând principiul lui d'Alembert, se consideră că asupra discului acționează forțe centrifuge, distribuite axial-simetric în tot volumul discului. Rezultă tensiuni și deformații distribuite simetric față de axa de rotație.

Discurile mașinilor rotative au grosime variabilă cu raza, putând fi solicitate la exterior de o sarcină centrifugală datorită paletelor, iar la interior de presiunea de fretaj pe arbore. În continuare se consideră un model simplificat - discul de grosime constantă, în rotație cu turație constantă, fără sarcini la exterior și interior, solicitat numai de forțe masice centrifuge, la care se neglijează eventuale solicitări la răsucire sau la încovoiere. O astfel de formă au discurile abrazive, dar acestea sunt neomogene și anizotrope datorită armăturilor.

Dacă discul este (axial) subțire, se presupune că este solicitat la o stare plană de tensiuni. Nu există tensiuni pe direcția axei de rotație. Tensiunile radiale și circumferențiale sunt constante pe grosimea discului.

Primele studii asupra tensiunilor în discuri subțiri în rotație au fost publicate de A. Stodola (1903) și M. Grüber (1906).

14.4.1 Tensiuni în discuri subțiri, în rotație

Calculul tensiunilor într-un disc în rotație este o problemă static nedeterminată, la rezolvarea căreia trebuie utilizate ecuații de echilibru, relații între deformații specifice și deplasări, relații între tensiuni și deformații specifice și condiții la limită asemănătoare celor stabilite pentru tuburi cu pereți groși. Deosebirea principală constă în adăugarea efectului forțelor de inerție în ecuația de echilibru.

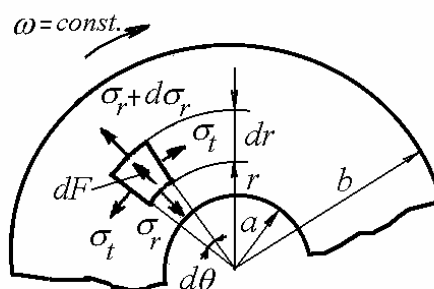


Fig. 14.9

Ecuția de echilibru

În figura 14.9 s-a reprezentat un element detașat dintr-un disc prin două plane axiale și două suprafețe cilindrice concentrice infinit vecine, de grosime egală cu unitatea. În afara forțelor care rezultă din tensiuni, asupra elementului mai acționează, pe direcția razei, o forță centrifugă

$$dF = r\omega^2 \rho r d\theta dr ,$$

unde ρ este densitatea materialului discului, iar ω este viteza unghiulară (constantă) de rotație (rad/s). Celelalte notații sunt aceleași ca în figura 14.1.

Ecuția de proiecții a forțelor pe bisectoarea unghiului $d\theta$ se scrie

$$\sigma_r r d\theta + 2\sigma_t dr \frac{d\theta}{2} - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta - dF = 0 ,$$

care se aduce la forma

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = -\rho \omega^2 r^2 . \quad (14.67)$$

Relațiile între deformații specifice și deplasări sunt (14.2) și (14.3), deci ecuația de compatibilitate este tot (14.4)

$$\frac{d}{dr}(\varepsilon_t \cdot r) = \varepsilon_r.$$

Relațiile între tensiuni și deformații specifice sunt (14.5)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_t), \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_r).$$

Înlocuind deformațiile specifice în ecuația de compatibilitate și ținând cont de (14.67) se obține a doua relație între tensiuni

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t \cdot r) - \sigma_r = -\nu \rho \omega^2 r^2. \quad (14.68)$$

Eliminând σ_t între relațiile (14.67) și (14.68), se obține ecuația diferențială

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} = -(3+\nu) \rho \omega^2, \quad (14.69)$$

care se mai scrie

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\sigma_r r^2) \right] = -(3+\nu) \rho \omega^2 r, \quad (14.69, a)$$

Soluția ecuației (14.69) are forma

$$\sigma_r = \bar{A} - \frac{\bar{B}}{r^2} - k_1 r^2, \quad (14.70)$$

Înlocuind expresia (14.70) în (14.67) rezultă

$$\sigma_t = \bar{A} + \frac{\bar{B}}{r^2} - k_2 r^2. \quad (14.71)$$

În relațiile (14.70) și (14.71) s-a notat

$$k_1 = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2, \quad k_2 = \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2. \quad (14.72)$$

Constantele de integrare \bar{A} și \bar{B} se determină din condițiile la limită. Acestea diferă pentru discul cu gaură centrală și pentru discul plin (fără gaură centrală).

În continuare se consideră discuri neîncărcate pe margini, solicitate deci doar de forțele masice.

14.4.1.1 Discuri cu gaură centrală

La discul fără sarcini radiale la interior și exterior, la $r = a$, $\sigma_r = 0$, și la $r = b$, $\sigma_r = 0$. Rezultă constantele de integrare

$$\bar{A} = k_1 (a^2 + b^2), \quad \bar{B} = k_1 a^2 b^2, \quad (14.73)$$

care înlocuite în relațiile (14.70) și (14.71) conduc la

$$\sigma_r = k_1 \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \quad (14.74)$$

$$\sigma_t = k_1 \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \quad (14.75)$$

Diagramele de variație ale tensiunilor în lungul razei sunt prezentate în figura 14.10.

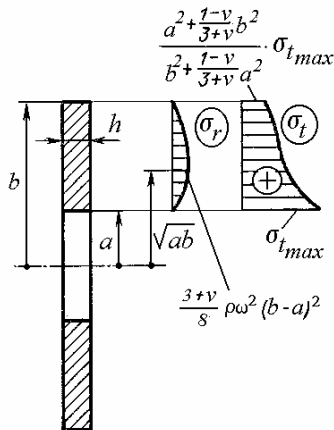


Fig. 14.10

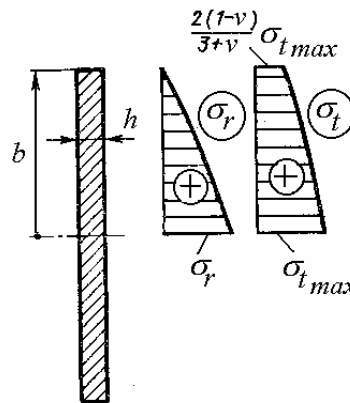


Fig. 14.11

Tensiunile de valoare maximă apar pe suprafața interioară și au valoarea

$$\sigma_{t_{max}} = 2k_1 \left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} a^2 \right). \quad (14.76)$$

Armarea discurilor de polizor se face prin inserții sau inele de sârmă înglobate în materialul abraziv în vecinătatea găurii discului, unde tensiunile locale de întindere au valori maxime.

Viteza unghiulară maximă care produce atingerea limitei de curgere σ_c pe suprafața interioară a discului, conform criteriilor Tresca și von Mises, este

$$\omega_c = \sqrt{\frac{4\sigma_c}{\rho[(3+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2]}} \quad (14.77)$$

Când $a \rightarrow 0$,

$$\sigma_{t_{max}} = 2k_1 b^2, \quad (14.77, a)$$

valoare ce corespunde unui disc cu o gaură centrală foarte mică.

14.4.1.2 Discuri pline

La discurile fără gaură, la $r=b$, $\sigma_r=0$, iar la centru, pentru $r=0$, $\sigma_r = \sigma_t$.

Rezultă constantele de integrare

$$\bar{A} = k_1 b^2, \quad \bar{B} = 0, \quad (14.78)$$

care înlocuite în (14.70) și (14.71) conduc la formulele tensiunilor

$$\sigma_r = k_1 (b^2 - r^2), \quad (14.79)$$

$$\sigma_t = k_1 \left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \quad (14.80)$$

Diagramele de variație ale tensiunilor în lungul razei sunt prezentate în figura 14.11.

Tensiunile maxime apar în centrul discului și sunt

$$\sigma_{t_{max}} = \sigma_{r_{max}} = k_1 b^2 = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2. \quad (14.81)$$

Se observă că pentru valori ρ și ν date, tensiunile depind numai de viteza periferică a discului $v = \omega b$.

Viteza unghiulară maximă care produce atingerea limitei de curgere σ_c pe suprafața interioară a discului, conform criteriilor Tresca și von Mises, este

$$\omega_c = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{8\sigma_c}{(3+\nu)\rho}}.$$

Comparând expresiile (14.77, a) și (14.81), rezultă că la discul cu gaură mică tensiunile în jurul găurii sunt de două ori mai mari decât în centrul discului fără gaură, deci gaura acționează ca un concentrator de tensiuni. Factorul teoretic de concentrare a tensiunilor elastice este în acest caz $K_t = 2$.

Exemplul 14.4

Să se determine tensiunile maxime dintr-un disc cu $a = 150$ mm, $b = 300$ mm, $\nu = 0,3$ și $\rho = 7850$ kg/m³, care se rotește cu viteza unghiulară constantă $\omega = 314$ rad/s.

Rezolvare

Tensiunile radiale maxime (fig. 14.10) apar la $r = 212,13$ mm și sunt

$$\sigma_{r_{max}} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b-a)^2 = 7,18 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunile circumferențiale maxime apar la interior și au valoarea

$$\sigma_{t_{max}} = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} a^2 \right) = 60,5 \text{ N/mm}^2.$$

14.4.2 Disc fretat pe arbore

Se consideră cazul unui disc de grosime constantă h , fretat pe un arbore în rotație cu viteza unghiulară constantă ω , rad/s. Se notează b și c razele interioară și exterioară ale discului, a și $b + \delta$ razele interioară și exterioară ale arborelui, δ - grosimea de fretaj, egală cu diferența între raza exterioară a arborelui și raza interioară a discului, în repaus, D - indice pentru disc și A - indice pentru arbore.

Tensiunile în disc se obțin din relațiile (14.74) și (14.75)

$$\sigma_r = \frac{3+\nu_D}{8} \rho_D \omega^2 \left(c^2 + b^2 - \frac{b^2 c^2}{r^2} - r^2 \right), \quad (14.82)$$

$$\sigma_t = \frac{3+\nu_D}{8} \rho_D \omega^2 \left(c^2 + b^2 + \frac{b^2 c^2}{r^2} - \frac{1+3\nu_D}{3+\nu_D} r^2 \right). \quad (14.83)$$

La $r = b$, $\sigma_r = 0$ și

$$\sigma_{t_{max}} = \frac{3+\nu_D}{4} \rho_D \omega^2 \left(c^2 + \frac{1-\nu_D}{3+\nu_D} b^2 \right). \quad (14.84)$$

La $r = b$, în cazul stării plane de tensiuni, deplasarea radială se obține din (14.3) și (14.5) fiind

$$u_{bD} = \frac{b}{E_D} \sigma_{t_{max}} = \frac{b}{E_D} \frac{3+\nu_D}{4} \rho_D \omega^2 \left(c^2 + \frac{1-\nu_D}{3+\nu_D} b^2 \right). \quad (14.85)$$

Tensiunile în arbore sunt

$$\sigma_r = \frac{3+\nu_A}{8} \rho_A \omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \quad (14.86)$$

$$\sigma_t = \frac{3+\nu_A}{8} \rho_A \omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu_A}{3+\nu_A} r^2 \right). \quad (14.87)$$

La $r=b$, $\sigma_r = 0$ și

$$\sigma_t = \frac{3+\nu_A}{4} \rho_A \omega^2 \left(a^2 + \frac{1-\nu_D}{3+\nu_D} b^2 \right). \quad (14.88)$$

La $r=b$, deplasarea radială este

$$u_{b_A} = \frac{b}{E_A} \sigma_t = \frac{b}{E_A} \frac{3+\nu_A}{4} \rho_A \omega^2 \left(a^2 + \frac{1-\nu_A}{3+\nu_A} b^2 \right). \quad (14.89)$$

Dacă rotorul pornește din repaus și ajunge la viteza unghiulară ω , strângerea se slăbește cu Δ , diferența între deplasările radiale ale discului și arborelui

$$\Delta = u_{b_D} - u_{b_A},$$

$$\Delta = \frac{\omega^2 b}{4} \left[\frac{3+\nu_D}{E_D} \rho_D \left(c^2 + \frac{1-\nu_D}{3+\nu_D} b^2 \right) - \frac{3+\nu_A}{E_A} \rho_A \left(a^2 + \frac{1-\nu_A}{3+\nu_A} b^2 \right) \right].$$

Relația (14.29) devine

$$\delta - \Delta = b p_c K_{AD} \quad (14.90)$$

unde

$$K_{AD} = \frac{1}{E_A} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_A \right) + \frac{1}{E_D} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} - \nu_D \right). \quad (14.91)$$

Înlocuind Δ în (14.90) se obține presiunea de fretaj la viteza unghiulară ω , corespunzătoare unei grosimi de fretaj în repaus δ

$$p_c = \frac{\delta - \Delta}{b K_{AD}}, \quad (14.92)$$

$$p_c = \frac{\delta - \frac{\omega^2 b}{4} \left[\frac{3+\nu_D}{E_D} \rho_D \left(c^2 + \frac{1-\nu_D}{3+\nu_D} b^2 \right) - \frac{3+\nu_A}{E_A} \rho_A \left(a^2 + \frac{1-\nu_A}{3+\nu_A} b^2 \right) \right]}{b \left[\frac{1}{E_A} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_A \right) + \frac{1}{E_D} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} - \nu_D \right) \right]}$$

Dacă arborele și discul sunt din același material, notând $E_D = E_A = E$, $\nu_D = \nu_A = \nu$, $\rho_D = \rho_A = \rho$, se obține

$$p_c = \left[\frac{\delta E}{c^2 - a^2} - \frac{\omega^2 b}{4} (3 + \nu) \rho \right] \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^3}. \quad (14.93)$$

Pentru arbore plin ($a = 0$) presiunea de fretaj este

$$p_c = \left[\frac{\delta E}{2bc^2} - \frac{(3 + \nu)}{8} \omega^2 \rho \right] (c^2 - b^2). \quad (14.94)$$

Viteza unghiulară maximă la care se anulează presiunea de fretaj între disc și arbore este

$$\omega_{max}^2 = \frac{4}{3 + \nu} \frac{E}{\rho} \frac{\delta}{bc^2}. \quad (14.95)$$

Dacă μ este coeficientul de frecare între disc și arbore, atunci cuplul transmis de asamblarea cu strângere este $M_t = Fb$ unde $F = \mu 2\pi b h p_c$

$$M_t = \mu 2\pi b^2 h p_c, \quad (14.96)$$

deci puterea transmisă este

$$P = M_t \omega = \mu 2\pi b^2 h p_c \omega. \quad (14.97)$$

Exemplul 14.5

Un disc cu diametrul exterior 600 mm și grosimea 75 mm este montat cu strângere pe un arbore cu diametrul de 100 mm. Dacă diametrul arborelui este mai mare cu 0,2 mm decât gaura discului, se cere să se calculeze: 1) presiunea de fretaj la turația de 5000 rot/min; 2) turația la care presiunea de fretaj se anulează; 3) puterea transmisă fără alunecare la 5000 rot/min pentru un coeficient de frecare $\mu = 0,15$. Se dau: $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$ și $\rho = 7850$ kg/m³ pentru disc și arbore.

Rezolvare

Razele discului sunt $c = 300$ mm și $b = 50$ mm. Grosimea de fretaj în repaus este $\delta = 0,1$ mm. Viteza unghiulară este $\omega = \pi \cdot 5000/30 = 523,6$ rad/s. Presiunea de fretaj în repaus este $p_{cst} = 194,44$ N/mm². Presiunea de fretaj (14.94) la turația 5000 rot/min este $p_c = 116,7$ N/mm². Turația la care presiunea de fretaj se anulează (14.95) este $\omega_{max} = 828,4$ rad/s, căreia îi corespunde o turație $n_{max} = 7910$ rot/min. Cuplul transmis (14.96) este $M_t = 2,06 \cdot 10^4$ Nm iar puterea transmisă fără alunecare (14.97) este $P = 10,8$ MW.

14.5 Tensiuni termice în discuri subțiri

Dacă un disc în rotație este încălzit neuniform, atunci în disc apar și tensiuni termice care se suprapun peste cele produse de câmpul centrifugal. În continuare se calculează tensiunile termice într-un disc subțire care nu se rotește.

În acest caz, distribuția temperaturii în lungul razei este mai greu de stabilit. Se consideră o distribuție parabolică, de forma

$$t = T \frac{r^2}{b^2}, \quad T = t_b - t_a. \quad (14.98)$$

Ecuatiile (14.1)-(14.4), (14.54) și (14.55) rămân valabile. Se obține ecuația diferențială de ordinul doi

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} = -E\alpha \frac{1}{r} \frac{dt}{dr}. \quad (14.99)$$

Soluția ecuației (14.99) are forma

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha T}{4} \frac{r^2}{b^2}, \quad (14.100)$$

iar expresia tensiunilor circumferențiale este

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3E\alpha T}{4} \frac{r^2}{b^2}, \quad (14.101)$$

Constantele de integrare A și B se determină din condițiile la limită. Pentru un disc plin, la $r = 0$, $\sigma_r = \sigma_t$ și la $r = b$, $\sigma_r = 0$. Rezultă

$$A = \frac{E\alpha T}{4}, \quad B = 0. \quad (14.102)$$

Înlocuind constantele (14.102) în relațiile (14.100) și (14.101) se obțin formulele tensiunilor radiale și circumferențiale

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T}{4} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right), \quad (14.103)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha T}{4} \left(1 - 3 \frac{r^2}{b^2} \right). \quad (14.104)$$

Diagramele temperaturilor și tensiunilor sunt prezentate în figura 14.12. Tensiunile de valoare maximă apar la marginea exterioară a discului ($T > 0$).

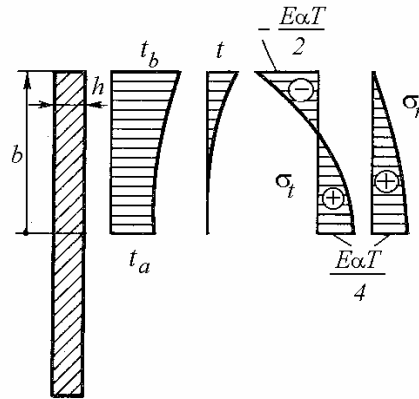


Fig. 14.12

În cazul general, pentru o distribuție dată a temperaturii $T(r)$, tensiunile se calculează cu relațiile

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{r^2} \int_a^r T r \, dr + \frac{E}{1-\nu^2} \left[A(1+\nu) - B \frac{1-\nu}{r^2} \right], \quad (14.105)$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E}{r^2} \int_a^r T r \, dr - \alpha E T + \frac{E}{1-\nu^2} \left[A(1+\nu) + B \frac{1-\nu}{r^2} \right]. \quad (14.106)$$

Deplasarea radială este

$$u = (1+\nu) \frac{\alpha}{r} \int_a^r T r \, dr + A r + \frac{B}{r}. \quad (14.107)$$

Constantele de integrare A și B se determină din valorile tensiunii radiale la interior și exterior. Astfel, la interior, tensiunea σ_r poate fi zero sau egală cu presiunea de fretaj cu semn schimbat. La exterior, σ_r poate fi zero sau egală cu presiunea creată de sarcina centrifugală datorită paletelor sau bandajului.

Exemplul 14.6

Să se calculeze tensiunile termice maxime dintr-un disc circular plin, pentru care $t_b = 700^\circ C$, $t_a = 200^\circ C$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.

Rezolvare

Pentru $T = 500^{\circ}\text{C}$, la exteriorul discului se obține

$$\sigma_{t\max} = -\frac{E\alpha T}{2} = 630 \text{ N/mm}^2.$$

Calculul este aproximativ, deoarece peste 300°C modulul de elasticitate scade cu creșterea temperaturii.

15.

ÎNCOVOIEREA PLĂCILOR SUBȚIRI

Plăcile sunt elemente tipice ale construcțiilor. În ingineria mecanică, se întâlnesc componente care se pot modela ca plăci în carcase, recipiente, suporti, corpurile lagărelor, diafragme cu rol de șicane, atenuatoare de fluctuații de presiune sau elemente elastice în aparate de măsură și control.

În continuare se studiază doar câteva cazuri simple, care permit soluții analitice închise, pentru familiarizarea cu mărimile specifice și "efectele de placă". Problemele practice se rezolvă utilizând metoda elementelor finite și programe adecvate de calcul.

15.1 Ipotezele teoriei încovoierii plăcilor subțiri

Plăcile sunt corpuri plane, mărginite de două suprafețe, situate la distanță mică în comparație cu dimensiunile acestora. Pe scurt, plăcile sunt corpuri care au două dimensiuni mai mari cu cel puțin un ordin de mărime decât a treia. Cele două elemente definitorii ale unei plăci sunt suprafața mediană și grosimea.

Suprafața mediană este egal depărtată de cele două suprafețe care delimitează placa. *Grosimea* este măsurată perpendicular pe suprafața mediană. Plăcile subțiri au grosimea sub $1/10$ din dimensiunile în planul acesteia. În general, plăcile au suprafața mediană plană. Învelișurile au suprafața mediană curbă.

Se admite că materialul plăcii este omogen, izotrop și elastic liniar. Grosimea plăcii se consideră mică în comparație cu dimensiunile plăcii în planul ei. Săgeata se admite că este mică în comparație cu grosimea plăcii. Ca urmare, în planul median al plăcii nu apar tensiuni de întindere (de membrană), acesta fiind astfel o *suprafață neutră*. Rezultatele obținute sunt strict valabile pentru plăci de grosime constantă.

La plăci cu nervuri de rigidizare, deși materialul este izotrop, prezența nervurilor face ca rigiditatea la încovoiere să varieze cu direcția. Aceste plăci se numesc *anizotrope constructiv*, cele mai utilizate fiind plăcile *ortotrope*

constructiv, cu nervuri perpendiculare între ele. Plăcile din compozite stratificate sunt studiate în manuale de specialitate.

Teoria inginerescă a încovoierii plăcilor se bazează pe ipotezele lui G. R. Kirchhoff (1850):

1. *Ipoteza normalei rectilinii*. Normala la suprafața mediană rămâne dreaptă (după încovoierea plăcii) și perpendiculară pe suprafața mediană deformată.

2. *Ipoteza independenței acțiunii straturilor*. Tensiunile normale pe suprafețe paralele cu suprafața mediană sunt neglijabile. Straturile paralele nu presează unul pe celălalt. Deci se consideră o stare plană de tensiuni.

15.2 Încovoierea pură

Încovoierea pură este produsă de momente uniform distribuite pe margini libere, nerezemate. La încovoierea pură nu există forțe tăietoare.

Fie un element de dimensiuni în plan dx , dy , decupat dintr-o placă de grosime h , solicitat la încovoiere pură (fig. 15.1, *a*). Momentele încovoietoare *pe unitatea de lungime* M_x și M_y (măsurate, de exemplu, în Nm/m), sunt pozitive când au sensurile indicate în figura 15.1, *b*, deci când produc tensiuni normale pozitive în jumătatea de jos a plăcii.

Relațiile între deformații specifice și deplasări

Se notează $1/\rho_x$ și $1/\rho_y$ curburile suprafeței mediane în secțiuni paralele cu planul xOz , respectiv yOz . Pe baza unui raționament asemănător celui de la încovoierea barelor drepte (Cap. 8), se stabilesc expresiile alungirilor specifice la distanța z de suprafața mediană

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y}. \quad (15.1)$$

Relațiile între tensiuni și deformații specifice

Deoarece în placă există o stare plană de tensiuni, se utilizează legea lui Hooke (9.64) sub forma

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x). \quad (15.2)$$

Înlocuind alungirile specifice (15.1) în relațiile (15.2) rezultă

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y} \right), \quad \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x} \right). \quad (15.3)$$

Ecuțiile (15.3) arată că, datorită ipotezei normalei rectilinii, tensiunile normale de încovoiere variază liniar pe grosimea plăcii. Ele sunt nule în suprafața mediană, care devine astfel o *suprafață neutră*, fără tensiuni de membrană.

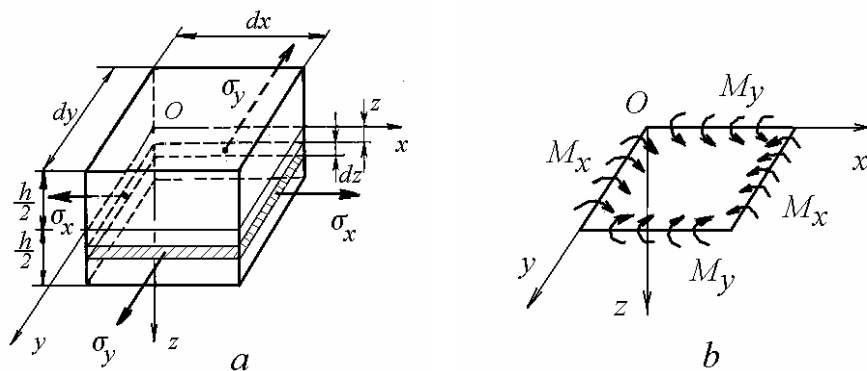


Fig. 15.1

Ecuțiile de echivalență între eforturi și tensiuni

Echilibrul între momentele interioare, datorite tensiunilor de încovoiere ce acționează pe fețele elementului, și momentele exterioare se scrie sub forma

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dy dz = M_x dy, \quad (15.4)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dx dz = M_y dx.$$

Înlocuind tensiunile din ecuațiile (15.3) în relațiile (15.4) și integrând, se obțin expresiile momentelor încovoietoare distribuite

$$M_x = D \left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y} \right), \quad (15.5)$$

$$M_y = D \left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x} \right),$$

unde D este rigiditatea la încovoiere a plăcii

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}. \quad (15.6)$$

Din relațiile (15.3) și (15.5) se obțin formulele de calcul al tensiunilor

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{\frac{h^3}{12}}, \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{\frac{h^3}{12}}. \quad (15.7)$$

Acestea au valori extreme la suprafața plăcii, pentru $z = \pm h/2$.

Pentru deformații mici, curburile principale se pot scrie sub forma (8.49)

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (15.8)$$

unde w este deplasarea în direcția z (săgeata).

Cu aceste notații, relațiile (15.5) se scriu

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (15.9)$$

Exprimând curburile în funcție de momente se obține

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_x} &= \frac{M_x - \nu M_y}{E \frac{h^3}{12}}, \\ \frac{1}{\rho_y} &= \frac{M_y - \nu M_x}{E \frac{h^3}{12}}, \end{aligned} \quad (15.10)$$

sau, înlocuind săgeata plăcii

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{1-\nu^2}{D} (M_x - \nu M_y), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{1-\nu^2}{D} (M_y - \nu M_x). \end{aligned} \quad (15.11)$$

Se consideră un element prismatic cu baza triunghiulară, detașat din placa sollicitată la încovoiere pură (fig. 15.2). Se presupun cunoscute momentele M_x și M_y care acționează pe fețele din planele de coordonate și se cere calculul momentelor care acționează pe fața înclinată cu unghiul α .

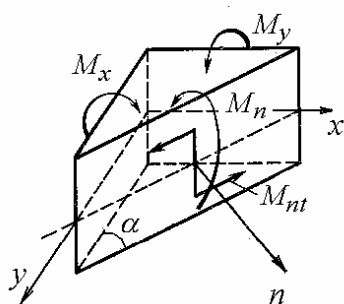


Fig. 15.2

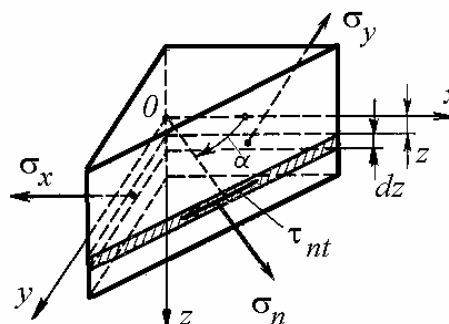


Fig. 15.3

Deoarece pe fața înclinată, pe lângă tensiunile normale care produc momentul încovoiător M_n , acționează și tensiuni tangențiale (fig. 15.3), acestea din urmă produc un moment de răsucire distribuit M_{nt} .

Problema se reduce la calculul stării de tensiuni în jurul unui punct (§ 9.2.1). Se cunosc tensiunile normale σ_x și σ_y (15.7) și se calculează tensiunile σ_n și τ_{nt} pe fața înclinată. Din relațiile (9.33) rezultă

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha, \quad (15.12)$$

$$-\tau_{nt} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (15.13)$$

Înlocuind σ_x și σ_y din relațiile (15.7), se obține

$$\sigma_n = \frac{12z}{h^3} \left(\frac{M_x + M_y}{2} + \frac{M_x - M_y}{2} \cos 2\alpha \right), \quad (15.14)$$

$$-\tau_{nt} = \frac{12z}{h^3} \frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (15.15)$$

Momentul încovoiător distribuit are expresia

$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_n dz = \frac{M_x + M_y}{2} + \frac{M_x - M_y}{2} \cos 2\alpha. \quad (15.16)$$

Momentul de răsucire distribuit este

$$M_{nt} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{nt} dz = \frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (15.17)$$

Momentul de răsucire maxim apare în planul înclinat la $\alpha = 45^\circ$ față de axele principale x și y . Momentele de răsucire produc deformații de răsucire ale planului plăcii. Caracterul acestei deformații apare în figura 15.4 în care se prezintă o parte din placa din figura 15.1, b decupată prin plane orientate la 45° față de axele x și y . După deformarea plăcii, liniile ab și cd nu mai sunt paralele.

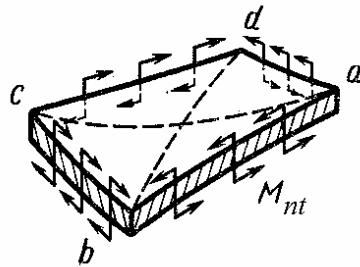


Fig. 15.4

Curbarea (îndoirea) plăcii în planele xOz și yOz se caracterizează prin razele de curbura ρ_x și ρ_y . Acestea se numesc *raze principale de curbura*. Una dintre ele are valoare maximă, cealaltă are valoare minimă. Pe direcția α , raza de curbura are o valoare intermediară dată de

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{\rho_y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_x} - \frac{1}{\rho_y} \right) \cos 2\alpha, \quad (15.18)$$

Dacă se decupează din placă un element rotit față de cel din figura 15.1, pe laturile acestuia acționează, în afara momentului încovoietor distribuit, și un moment de răsucire distribuit. Acesta din urmă produce tensiuni tangențiale de răsucire paralele cu conturul, distribuite liniar pe grosimea plăcii.

Înseamnă că elementul de placă din figura 15.1 a fost decupat în lungul unor *direcții principale*, pe care nu acționează momente de răsucire distribuite, fiind sollicitat de fapt de *momente încovoietoare principale*.

15.3 Încovoierea cilindrică

La încovoierea cilindrică, suprafața mediană a plăcii se deformează într-o suprafață cilindrică (cu excepția marginilor).

În figura 15.5 se prezintă o placă încastrată în lungul unei laturi și încărcată cu o sarcină uniform distribuită în lungul laturii opuse. Forma deformată este desenată cu linii întrerupte.

Încovoierea cilindrică a plăcilor se aseamănă cu încovoierea barelor. Diferența constă în faptul că la încovoierea barelor deformațiile transversale nu sunt împiedicate. Ca urmare apare deformația "anticlastică" descrisă în Capitolul 8. Forma secțiunii transversale se modifică. Lățimea acesteia scade în zona întinsă și crește în zona comprimată.

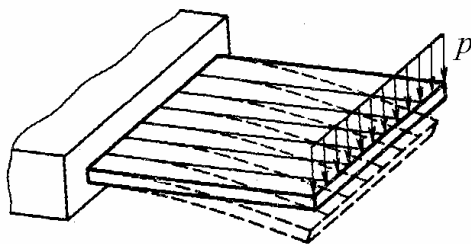


Fig. 15.5

Dacă pe suprafața plăcii se trasează linii paralele longitudinale, la încovoierea cilindrică distanța între acestea nu se modifică, deci deformația relativă în direcție transversală este nulă. Interacțiunea fibrelor longitudinale face ca în placă să apară tensiuni în direcție transversală, deci și momentele încovoietoare distribuite corespunzătoare.

Înlocuind $\varepsilon_y = 0$ în relațiile (15.2), se obține

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \nu \sigma_x. \quad (15.19)$$

Relațiile (15.5) devin

$$M_x = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \frac{1}{\rho_x} = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (15.20)$$

$$M_y = \nu M_x.$$

Rezultă că încovoierea cilindrică în planul xOz poate apare doar dacă pe conturul plăcii se aplică și momentul distribuit M_y . Dacă momentul M_y lipsește, atunci lângă marginile plăcii forma suprafeței deformate a plăcii diferă puțin de cea cilindrică.

Atunci când $\varepsilon_y = 0$ și $M_y = \nu M_x$, rezultă $\frac{1}{\rho_y} = 0$, generatoarea este

linie dreaptă, deci încovoierea este cilindrică.

Dacă placa nu ar fi încastrată pe o latură și asupra plăcii ar acționa numai momentul M_x (fig. 15.6), deoarece curbarea plăcii pe direcție transversală nu este limitată, placa poate fi privită ca un ansamblu de fâșii longitudinale separate, fiecare deformându-se ca o bară.

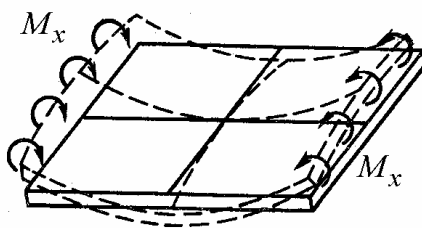


Fig. 15.6

În acest caz starea de tensiuni este uniaxială, $\sigma_y = 0$, deci $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$ și, spre deosebire de încovoierea cilindrică, placa se curbează și în direcție transversală, în sens contrar, $\frac{1}{\rho_y} = -\nu \frac{1}{\rho_x}$.

15.4 Încovoierea axial-simetrică a plăcilor circulare

În cazul încovoierii plăcilor circulare, dacă încărcarea este axial-simetrică atunci toate mărimile depind numai de rază, deci problema este unidimensională.

15.4.1 Relații între momente și unghiul de înclinare al normalei

Relațiile între deformații specifice și deplasări

În figurile 15.7, a și b se prezintă secțiuni prin placă, înainte și după deformare. În ipoteza deformațiilor mici, datorită săgeților mici, punctele a și b din planul median se deplasează numai pe verticală. Normala în a la suprafața mediană

se rotește cu unghiul φ , rămânând dreaptă și perpendiculară pe suprafața mediană deformată a plăcii. Normala în punctul b se rotește cu unghiul $\varphi + d\varphi$.

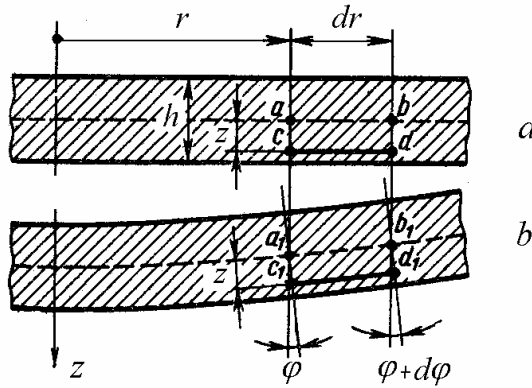


Fig. 15.7

Într-un strat situat la distanța z de planul median, alungirea specifică radială este

$$\varepsilon_r = \frac{c_1 d_1 - cd}{cd} = \frac{\Delta(dr)}{dr},$$

unde $\Delta(dr) = z(\varphi + d\varphi) - z\varphi = z d\varphi$. Rezultă

$$\varepsilon_r = \frac{d\varphi}{dr} z. \quad (15.21)$$

Alungirea specifică circumferențială este egală cu variația relativă a lungimii cercului de rază r

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + \varphi z) - 2\pi r}{2\pi r},$$

deci

$$\varepsilon_t = \frac{\varphi}{r} z. \quad (15.22)$$

Relațiile între tensiuni și deformații specifice

Pe baza ipotezei independenței acțiunii straturilor, $\sigma_z = 0$, iar legea lui Hooke pentru starea plană de tensiuni se scrie

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t), \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r). \quad (15.23)$$

Înlocuind alungirile specifice (15.21) și (15.22) în relațiile (15.23) rezultă

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right), \\ \sigma_t &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right).\end{aligned}\quad (15.24)$$

Tensiunile normale din placă variază liniar pe grosime (fig. 15.8). În afara acestora, în placă mai acționează și tensiuni tangențiale paralele cu axa Oz , a căror distribuție pe grosime este parabolică, cu valori nule la extremități.

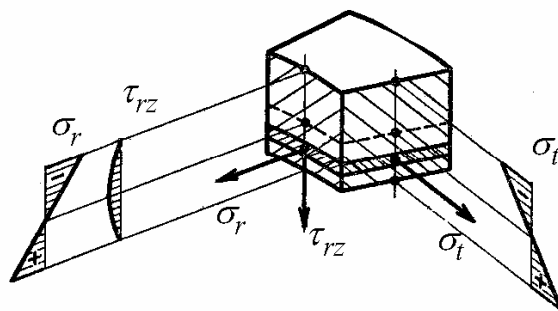


Fig. 15.8

Relațiile de echivalență între momente și tensiuni

Echilibrul între momentele interioare, datorite tensiunilor normale ce acționează pe fețele elementului, și momentele exterioare se scrie sub forma

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_r dz, \quad M_t = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_t dz. \quad (15.25)$$

Înlocuind tensiunile din ecuațiile (15.3) în relațiile (15.4) și integrând, se obține

$$\begin{aligned}M_r &= D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right), \\ M_t &= D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right),\end{aligned}\quad (15.26)$$

unde D este rigiditatea la încovoiere a plăcii (15.6).

Din relațiile (15.24) și (15.26) se obțin relațiile de calcul al tensiunilor normale

$$\sigma_r = \frac{M_r z}{h^3/12}, \quad \sigma_t = \frac{M_t z}{h^3/12}. \quad (15.27)$$

Atât momentele cât și tensiunile normale depind de unghiul de înclinare al normalei φ , care se determină din ecuațiile de echilibru și condițiile la limită.

15.4.2 Ecuațiile de echilibru

Un element detașat din placă prin două plane axiale și două suprafețe cilindrice concentrice infinit vecine (fig. 15.9, *a*) este în echilibru sub acțiunea sarcinii exterioare q și a momentelor și forțelor tăietoare distribuite liniar. Datorită simetriei, pe fețele din planele axiale ale acestui element nu acționează forțe tăietoare. Fie M_t momentul încovoietor circumferențial, M_r momentul încovoietor radial și Q forța tăietoare, pe unitatea de lungime, și q sarcina exterioară, pe unitatea de suprafață.

O forță tăietoare pozitivă acționează pe o față pozitivă în sensul pozitiv al axei z . Momentul M_r și forța Q variază cu raza r .

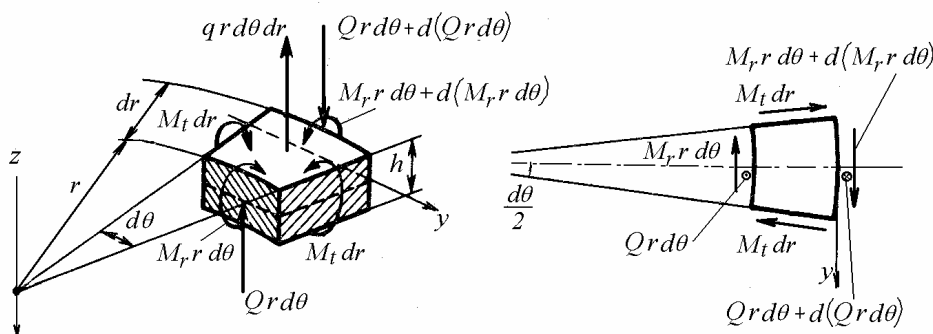


Fig. 15.9

Ecuația de proiecții a forțelor pe verticală este

$$Q r d\theta + d(Q r d\theta) - Q r d\theta = q r d\theta dr,$$

care se mai scrie

$$\frac{d(Qr)}{dr} = qr. \quad (15.28)$$

Ecuția de momente față de tangenta y la cercul exterior este

$$M_r r d\theta + d(M_r r d\theta) - M_r r d\theta - 2M_t dr \frac{d\theta}{2} - Qr d\theta dr = qr d\theta dr \frac{dr}{2}.$$

Neglijând termenul din membrul drept, care este un infinit mic de ordin superior, după simplificări se obține

$$\frac{d(M_r r)}{dr} - M_t = Qr. \quad (15.29)$$

Ecuțiile (15.26), (15.28) și (15.29) formează un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute Q , M_r , M_t și φ .

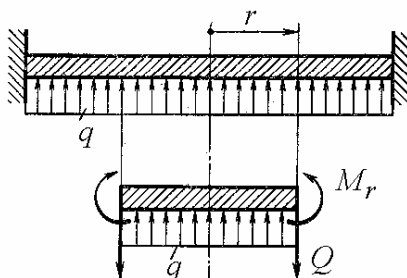


Fig. 15.10

Forța tăietoare distribuită Q se obține integrând ecuația (15.28)

$$Qr = \int_0^r qr dr. \quad (15.30)$$

Ea poate fi determinată direct dacă se scrie echilibrul unui disc de rază r decupat din placă (fig. 15.10). Pentru o placă încărcată cu sarcină uniform distribuită, ecuația de echilibru a forțelor se scrie

$$\begin{aligned} q\pi r^2 - Q2\pi r &= 0, \\ Q &= \frac{qr}{2}. \end{aligned} \quad (15.31)$$

În general

$$Q = \frac{P}{2\pi r}, \quad (15.32)$$

unde P este forța totală aplicată în perimetrul $2\pi r$.

15.4.3 Ecuația înclinării normalei

Înlocuind momentele (15.26) în relația (15.29), se obține ecuația înclinării normalei în funcție de forța tăietoare

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi = \frac{Q}{D}, \quad (15.33)$$

care se mai scrie sub forma mai ușor integrabilă

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\varphi r) \right] = \frac{Q}{D}. \quad (15.33, a)$$

Soluția generală a ecuației (15.33, a) este

$$\varphi(r) = Ar + \frac{B}{r} + \frac{1}{Dr} \int \left(\hat{r} \int Q d\tilde{r} \right) d\hat{r}. \quad (15.34)$$

Constantele de integrare A și B se determină din condițiile de încărcare și de rezemare, pe contur sau la interior (dacă este cazul):

- Pe o margine încastrată, $\varphi = 0$.

- Pe o margine simplu rezemată sau liberă, tensiunile radiale σ_r și momentele radiale M_r sunt nule

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right)_{r=R} = 0, \quad (15.35)$$

unde R este raza marginii respective.

- Pe un contur de rază R încărcat cu un moment M distribuit

$$D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right)_{r=R} = M, \quad (15.36)$$

La placa fără gaură centrală, la $r=0$ unghiul φ are valori finite, deci $B=0$.

Al treilea termen din membrul drept depinde de încărcarea plăcii. Dacă în cercul de perimetru $2\pi r$ acționează o sarcină uniform distribuită q și o forță concentrată F , ambele dirijate în sus, atunci

$$Q = \frac{F}{2\pi r} + \frac{qr}{2}. \quad (15.37)$$

Se calculează

$$\int Q dr = \int \left(\frac{F}{2\pi r} + \frac{qr}{2} \right) dr = \frac{F}{2\pi} \ln r + \frac{qr^2}{4} + C_1^*,$$

$$\int r \left(\frac{F}{2\pi} \ln r + \frac{qr^2}{4} + C_1^* \right) dr = \frac{F}{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + \frac{qr^4}{16} + C_1^* \frac{r^2}{2} + C_2,$$

Deci în (15.34) termenul al treilea $I = \frac{1}{Dr} \int \left(\hat{r} \int Q d\tilde{r} \right) d\hat{r}$ devine

$$I = \frac{Fr}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + \frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1^*}{2D} r + \frac{C_2}{D} \frac{1}{r}.$$

Ultimii doi termeni se adună cu primii doi termeni din membrul drept al relației (15.34) și se obține expresia înclinării normalei sub forma

$$\varphi = \frac{Fr}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + \frac{qr^3}{16D} + Ar + \frac{B}{r}. \quad (15.38)$$

15.4.4 Calculul săgeților

În figura 15.11 se arată suprafața deformată a plăcii. Pentru unghiuri pozitive de rotire a normalei, $\varphi > 0$, și pentru o creștere a razei $dr > 0$, săgeata scade, $dw < 0$, deci

$$dw = -\varphi dr,$$

de unde rezultă

$$w = -\int \varphi dr + C. \quad (15.39)$$

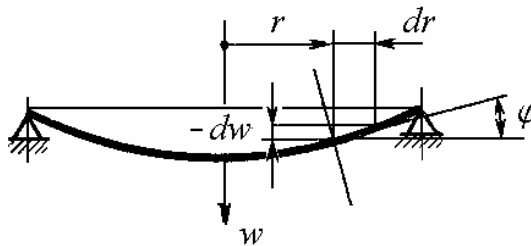


Fig. 15.11

În general, constanta de integrare C se determină din condiția anulării săgeții pe conturul rezemat.

15.4.5 Plăci încărcate cu sarcină uniform distribuită

15.4.5.1 Placa încastrată pe contur

La placa din figura 15.12, a sarcina distribuită este aplicată în jos, deci relația (15.38) devine

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} + Ar + \frac{B}{r}. \quad (15.40)$$

În centru, la $r = 0$, $\varphi = 0$, deci $B = 0$.

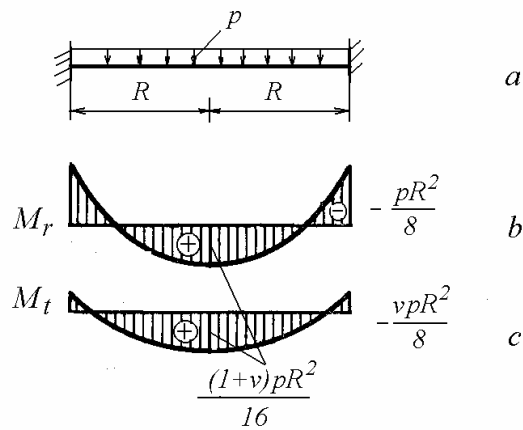


Fig. 15.12

Pe contur, la $r = R$, $\varphi = 0$, deci $A = \frac{pR^2}{16D}$.

Rezultă

$$\varphi = \frac{pr}{16D} (R^2 - r^2). \quad (15.41)$$

Se calculează

$$\frac{\varphi}{r} = \frac{p}{16D} (R^2 - r^2), \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{p}{16D} (R^2 - 3r^2).$$

Din relațiile (15.26) se deduc expresiile momentelor încovoietoare

$$M_r = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2], \quad (15.42)$$

$$M_t = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]. \quad (15.43)$$

Pentru o placă din oțel, înlocuind $\nu = 0,3$ în relațiile de mai sus, se obține

$$M_r = \frac{p}{16} (1,3 R^2 - 3,3 r^2),$$

$$M_t = \frac{p}{16} (1,3 R^2 - 1,9 r^2).$$

În figurile 15.12, b și c se prezintă diagramele de variație a momentelor încovoietoare în lungul razei plăcii.

Tensiunile normale din placă, la suprafață, au expresiile

$$\sigma_r = \pm \frac{6p}{16h^2} (1,3 R^2 - 3,3 r^2),$$

$$\sigma_t = \pm \frac{6p}{16h^2} (1,3 R^2 - 1,9 r^2).$$

Valoarea cea mai mare a tensiunilor radiale pe contur

$$\sigma_{r_{max}} = \frac{3pR^2}{4h^2}.$$

Dacă se admite, $\sigma_{r_{max}} = \sigma_a$, unde σ_a este o rezistență admisibilă, atunci se obține relația de dimensionare

$$h = \sqrt{\frac{3pR^2}{4\sigma_a}}.$$

Înlocuind (15.41) în (15.39) se obține ecuația săgeții

$$w = - \int \left[\frac{pr}{16D} (R^2 - r^2) \right] dr + C = - \frac{p}{16D} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) + C.$$

Constanta C se obține din condiția ca la $r = R$, $w = 0$. Rezultă $C = \frac{pR^4}{64D}$.

Ecuația săgeții devine

$$w = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2. \quad (15.44)$$

Săgeata maximă apare în centrul plăcii unde, pentru $r = 0$, se obține

$$w_{max} = \frac{pR^4}{64D}.$$

15.4.5.2 Placa simplu rezemată pe contur

La placa din figura 15.13, a ecuația înclinării normalei este (15.40)

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} + Ar + \frac{B}{r},$$

în care $B = 0$, deoarece în centru, la $r = 0$, $\varphi = 0$.

Pe contur, la $r = R$, $M_r = 0$, deci $A = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{pR^2}{16D}$.

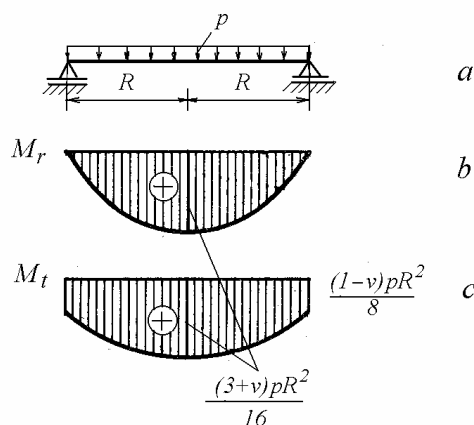


Fig. 15.13

Rezultă

$$\varphi = \frac{pr}{16D} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right). \quad (15.45)$$

Din relațiile (15.26) se deduc expresiile momentelor încovoietoare distribuite

$$M_r = \frac{p}{16} (3+\nu) (R^2 - r^2), \quad (15.46)$$

$$M_t = \frac{p}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]. \quad (15.47)$$

Momentul încovoietor maxim apare în centrul plăcii unde

$$M_r = M_t = \frac{pR^2}{16} (3+\nu).$$

Diagramele momentelor sunt prezentate în figurile 15.13, *b* și *c*.

Tensiunea maximă apare în centru și are valoarea

$$\sigma_{r \max} = \frac{3}{8} \frac{pR^2}{h^2} (3 + \nu).$$

Săgeata maximă în centrul plăcii este

$$w_{\max} = \frac{pR^4}{64D} \frac{5 + \nu}{1 + \nu}.$$

15.4.5.3 Placa cu gaură centrală

Se consideră o diafragmă din oțel utilizată la măsurarea debitului fluidelor (fig. 15.14), modelată ca placă încastată pe contur. Pentru simplificarea calculului se consideră $b = 3a$.

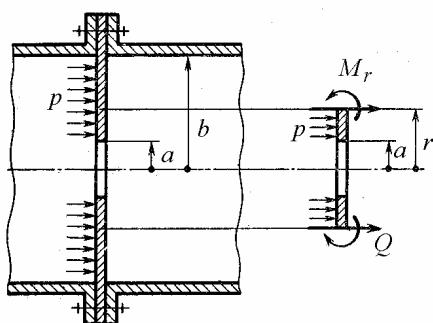


Fig. 15.14

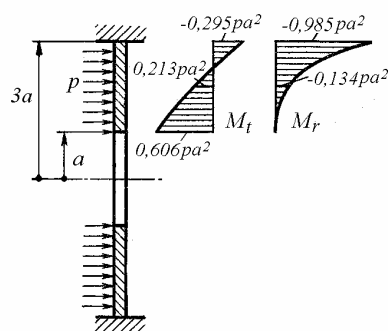


Fig. 15.15

Detășând un inel cu raza interioară a și raza exterioară r , din echilibrul forțelor se calculează forța tăietoare

$$Q = -\frac{p(r^2 - a^2)}{2r},$$

care se înlocuiește în relația (15.34).

Se obține

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r} - \frac{p}{16D} \left(\frac{r^4 - a^4}{r} - 4a^2 r \ln \frac{r}{a} \right),$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = A - \frac{B}{r^2} - \frac{p}{16D} \left(3r^2 + \frac{a^4}{r^2} - 4a^2 - 4a^2 \ln \frac{r}{a} \right).$$

Constantele A și B se determină din condițiile la limită. La $r = a$, $M_r = 0$, deci $\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right)_{r=a} = 0$, și la $r = b$, $\varphi = 0$.

Rezultă sistemul de ecuații

$$A(1 + \nu) - B \frac{1 - \nu}{a^2} = 0,$$

$$Ab + \frac{B}{b} - \frac{p}{16D} \left(\frac{b^4 - a^4}{b} - 4a^2 b \ln \frac{b}{a} \right) = 0.$$

Înlocuind $b = 3a$ și $\nu = 0,3$ se obține

$$A = 0,233 \frac{p a^2}{D}, \quad B = 0,433 \frac{p a^4}{D}.$$

Rezultă

$$\varphi = \frac{p a^2 r}{D} \left(0,233 + 0,495 \frac{a^2}{r^2} - 0,0625 \frac{r^2}{a^2} + 0,25 \ln \frac{r}{a} \right),$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{p a^2}{D} \left(0,483 - 0,495 \frac{a^2}{r^2} - 0,1875 \frac{r^2}{a^2} + 0,25 \ln \frac{r}{a} \right).$$

Din relațiile (15.26) se obțin apoi expresiile momentelor încovoietoare, ale căror diagrame sunt prezentate în figura 15.15, pentru cazul particular considerat.

Săgeata maximă este

$$w_{max} = 0,962 \frac{p a^4}{D}.$$

15.4.6 Plăci încărcate cu o forță concentrată în centru

15.4.6.1 Placa încastrată pe contur

La placa din figura 15.16, a încărcată în centru cu o forță F dirijată în jos, ecuația (15.38) devine

$$\varphi = -\frac{F r}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + A r + \frac{B}{r},$$

în care $B = 0$, deoarece în centru, la $r = 0$, $\varphi = 0$ și $(r \ln r)_{r=0} = 0$.

Pe contur, la $r = R$, $\varphi = 0$, deci $A = \frac{F}{8\pi D}(2 \ln R - 1)$.

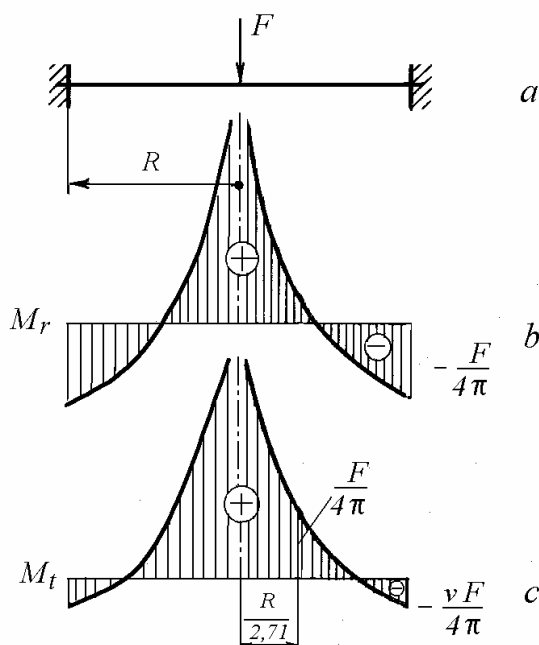


Fig. 15.16

Rezultă ecuația înclinării normalei

$$\varphi = \frac{F r}{4\pi D} \ln \frac{R}{r}. \quad (15.48)$$

Momentele încovoietoare distribuite sunt

$$M_r = \frac{F}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 \right], \quad (15.49)$$

$$M_t = \frac{F}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu \right]. \quad (15.50)$$

În centru, la $r = 0$, $M_r \rightarrow \infty$. Pe contur, la $r = R$, momentele sunt

$$M_r = -\frac{F}{4\pi}, \quad M_t = -\frac{F\nu}{4\pi} = \nu M_r.$$

Diagramele momentelor încovoietoare distribuite sunt prezentate în figurile 15.16, *b* și *c*.

Tensiunile maxime pe conturul plăcii au expresiile

$$\sigma_r = \frac{3F}{2\pi h^2}, \quad \sigma_t = \frac{3F\nu}{2\pi h^2} = \nu\sigma_r.$$

Ecuția săgeții este

$$w = \frac{Fr^2}{8\pi D} \ln \frac{r}{R} + \frac{F}{16\pi D} (R^2 - r^2) \quad (15.51)$$

iar în centrul plăcii, săgeata maximă are valoarea

$$w_{max} = \frac{FR^2}{16\pi D}.$$

15.4.6.2 Placa simplu rezemată pe contur

La placa simplu rezemată pe contur, ecuația înclinării normalei este

$$\varphi = -\frac{Fr}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + Ar + \frac{B}{r},$$

în care $B = 0$, deoarece în centru, la $r = 0$, $\varphi = 0$ și $(r \ln r)_{r=0} = 0$.

Pe contur, la $r = R$, $M_r = 0$, deci

$$A = \frac{F}{4\pi D} \left(2 \ln R + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right).$$

Rezultă ecuația înclinării normalei

$$\varphi = \frac{Fr}{4\pi D} \left(\ln \frac{R}{r} + \frac{1}{1+\nu} \right). \quad (15.52)$$

Momentele încovoietoare au expresiile

$$M_r = \frac{F}{4\pi} (1+\nu) \ln \frac{R}{r}, \quad (15.53)$$

$$M_t = \frac{F}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} + 1 - \nu \right], \quad (15.54)$$

având valori infinite în centrul plăcii.

Față de cazul precedent, pe contur momentele încovoietoare nu mai sunt negative. Momentul radial este nul iar momentul circumferențial este pozitiv, ca și în restul plăcii.

În realitate, forța concentrată nu se aplică chiar într-un punct, ci pe o suprafață finită, caz în care momentele încovoietoare din centrul plăcii au valori finite.

Ecuția săgeții este

$$w = \frac{F r^2}{8 \pi D} \ln \frac{r}{R} + \frac{F}{16 \pi D} \frac{3 + \nu}{1 + \nu} (R^2 - r^2) \quad (15.55)$$

iar în centrul plăcii, săgeata maximă are valoarea

$$w_{max} = \frac{F R^2}{16 \pi D} \frac{3 + \nu}{1 + \nu}.$$

Plăci cu alte condiții de rezemare și încărcare sunt tratate în literatura tehnică de specialitate [28, 51, 63, 65, 69].

16.

SOLICITĂRI ELASTO - PLASTICE

În capitolele precedente s-a studiat comportarea corpurilor deformabile solicitate în regim elastic, admitând una din ipotezele de bază ale Rezistenței materialelor - legea lui Hooke.

În practică, materialele pot fi solicitate peste limita de elasticitate. În aceste condiții, relația între tensiuni și deformații specifice nu mai este liniară. După înlăturarea sarcinilor exterioare, corpurile au deformații permanente, deci în corpuri există tensiuni remanente.

Studiul acestor fenomene face obiectul Teoriei plasticității. În cele ce urmează se vor examina numai câteva probleme privind încovoierea și răsucirea barelor drepte, starea de tensiuni din tuburile cu pereți groși și discurile în rotație solicitate în regim elasto-plastic și o prezentare a autofretajului.

16.1 Schematizarea curbei caracteristice a materialelor

La oțelurile cu conținut redus de carbon, diagrama caracteristică $\sigma - \varepsilon$ are forma din figura 16.1, *a*, unde se remarcă un palier de curgere pronunțat *AB*, urmat de o zonă de ecruisare *BC*.

În calcule, se înlocuiește curba caracteristică reală cu una simplificată, pentru care se poate stabili o relație simplă $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

Materialul elastic - ideal plastic (fig. 16.1, *b*) are o curbă cu o zonă de deformații elastice *OA*, urmată de o zonă de curgere *AB*, în care deformația specifică crește la tensiune constantă, egală cu limita de curgere (L. Prandtl, 1903).

La *materialul cu ecruisare* (fig. 16.1, *c*) zona de deformare elastică se termină la limita de curgere, dar se accentuează fenomenul de întărire (ecruisare), linia *AC* având panta $\operatorname{tg}\beta = E_p$, mărime definită ca *modulul de plasticitate* al materialului.

Comportarea materialelor solicitate elasto-plastic poate fi descrisă cu ajutorul modelelor mecanice din figura 16.2 formate din arcuri, caracterizate prin rigiditatea k , și elemente cu frecare uscată, care se deblochează atunci când forța de tracțiune depășește o valoare limită F_c .

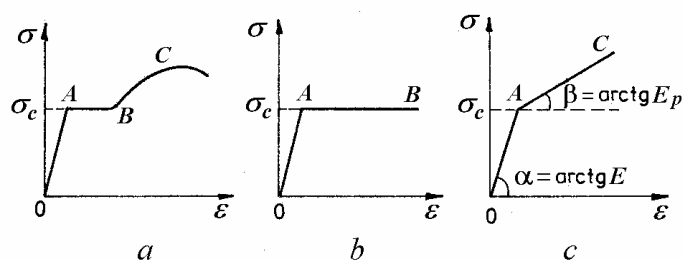


Fig. 16.1

La modelul din figura 16.2, *a*, relația forță-deformație are alura diagramei din figura 16.1, *b*. Când forța crește de la zero la o valoare F_c , arcul se deformează liniar instantaneu (linia OA), după care se deblochează elementul cu frecare uscată, ceea ce face ca deformația să crească la forța constantă (linia AB).

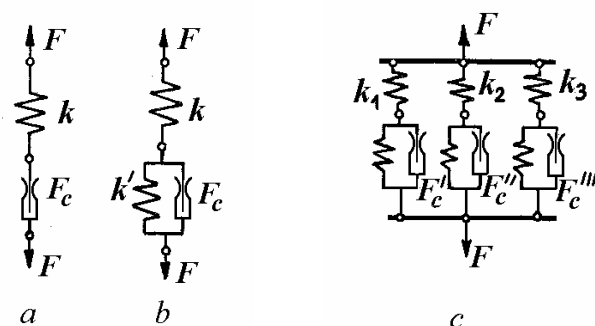


Fig. 16.2

La modelul din figura 16.2, *b*, când forța are valori inferioare pragului de deblocare F_c , lucrează numai arcul superior, relația forță-deformație fiind descrisă de linia OA din figura 16.1, *c*. Când forța depășește valoarea F_c , se deblochează etajul inferior al modelului, cele două arcuri legate în serie au o rigiditate echivalentă mai mică și se obține dreapta AC din figura 16.1, *c*.

Prin legarea în paralel a trei modele (fig. 16.2, *c*) de tipul celui din figura 16.2, *b*, având diferite rigidități și diferite praguri de deblocare a elementelor cu frecare uscată, s-a obținut o diagramă forță-deformație având alura curbei caracteristice din figura 16.1, *a* [38].

16.2 Încovoierea elasto-plastică a barelor

Pentru simplificare, se consideră bare la care secțiunea transversală are două axe de simetrie, axa Oz fiind în planul longitudinal al forțelor. Se utilizează aceleași ecuații de echilibru și relații între deformații specifice și deplasări ca în cazul încovoierii în regim elastic, diferă doar relația între tensiuni și deformații specifice. Admițând ipoteza secțiunii plane (Bernoulli) rezultă o distribuție liniară a deformațiilor specifice chiar dacă distribuția tensiunilor nu mai este liniară.

16.2.1 Încovoierea pură

Alungirea unei fibre situate la distanța z de axa neutră are expresia

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}, \quad (16.1)$$

unde ρ este raza de curbură a fibrei medii deformată. Alungirilor specifice ε_x le corespund tensiuni normale σ_x orientate în lungul fibrelor. Relația între tensiuni și alungiri specifice este reprezentată de ecuația curbei caracteristice a materialului $\sigma = f(\varepsilon)$. Având în vedere relația (16.1), rezultă că

$$\sigma_x = \frac{1}{\rho} f(z),$$

deci tensiunile au o distribuție pe înălțimea secțiunii asemănătoare cu cea descrisă de ecuația curbei caracteristice a materialului.

În continuare, se va urmări evoluția distribuției tensiunilor în secțiunea transversală a unei bare solicitate la încovoiere, admițând cele două schematizări ale curbei caracteristice a materialului din figurile 16.1, b și c .

16.2.1.1 Bare din material elastic - ideal plastic

Fie bara din figura 16.3, a solicitată la încovoiere pură prin momentul M . Se pune problema stabilirii legii de variație a tensiunilor pe secțiune și a relației analitice între momentul încovoietor și tensiuni.

Se consideră că momentul M este aplicat static, crescând de la zero la valoarea nominală într-un timp relativ lung, și se urmărește modificarea distribuției tensiunilor normale produse de acest moment încovoietor (fig. 16.4).

Pentru o valoare relativ mică $M = M_1$, secțiunea este solicitată elastic, diagrama tensiunilor are o variație liniară (fig. 16.4, a), tensiunea din fibrele extreme este

$$\sigma_{max_1} = \frac{M_1}{W_y},$$

fiind inferioară limitei de curgere a materialului $\sigma_{max_1} < \sigma_c$.

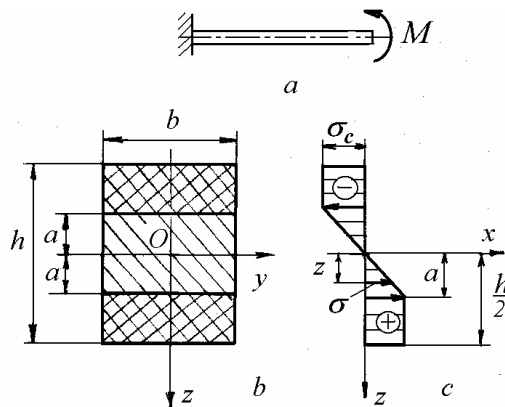


Fig. 16.3

Pentru un moment încovoiator $M_2 > M_1$, în fibrele extreme se atinge limita de curgere a materialului (fig. 16.4, b) iar

$$M_2 = \sigma_c W_y,$$

unde $W_y = bh^2/6$ este modulul de rezistență al întregii secțiuni față de axa Oy. Secțiunea este încă toată solicitată elastic, cu excepția fibrelor extreme unde s-a atins limita de curgere.

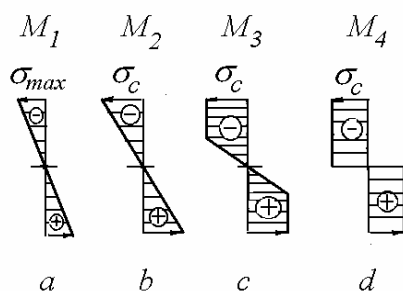


Fig. 16.4

Dacă momentul încovoiator crește până la o valoare $M_3 > M_2$, linia diagramei tensiunilor tinde să se încline mai mult, dar conform schematizării lui Prandtl, nu se poate depăși valoarea limitei de curgere σ_c . Se obține diagrama din figura 16.4, c, desenată la scară mai mare în figura 16.3, c. Rezultă că o parte a secțiunii (cea dublu hașurată) este solicitată plastic (fig. 16.3, b), partea centrală (simplu hașurată) fiind solicitată elastic. Se spune că bara este *solicitată elasto-plastic*.

În partea solicitată plastic $\sigma = \sigma_c$ iar în cea solicitată elastic $\sigma = \frac{z}{a} \sigma_c$.

Relația de echivalență între tensiuni și momentul încovoietor se scrie

$$M = \int_{-a}^a \frac{z}{a} \sigma_c z \, dA + 2 \int_a^{h/2} \sigma_c z \, dA$$

sau

$$M = \frac{\sigma_c}{a} \int_{-a}^a z^2 \, dA + 2 \sigma_c \int_a^{h/2} z \, dA. \quad (16.2)$$

Se notează

$$I_e = \int_{-a}^a z^2 \, dA, \quad (16.3)$$

momentul de inerție axial al părții de secțiune solicitate elastic și corespunzător

$$W_e = I_e / a \quad (16.4)$$

modulul de rezistență axial al "nucleului elastic".

De asemenea, se notează

$$S_p = - \int_{-h/2}^{-a} z \, dA + \int_a^{h/2} z \, dA = 2 \int_a^{h/2} z \, dA, \quad (16.5)$$

momentul static față de axa neutră al părții de secțiune solicitate plastic.

Cu notațiile (16.3)-(16.5), relația (16.2), care definește *momentul încovoietor elasto-plastic* pentru o secțiune cu două axe de simetrie, devine

$$M = \sigma_c (W_e + S_p). \quad (16.6)$$

În cazul secțiunii dreptunghiulare din figura 16.3, b acesta se scrie

$$M = \sigma_c b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right). \quad (16.7)$$

Rezultă că pentru calculul momentului M_3 se utilizează formula (16.6).

Dacă momentul încovoietor crește în continuare, porțiunea liniară a diagramei tensiunilor pentru zona solicitată elastic se înclină și mai mult, la limită devenind orizontală (fig. 16.4, d). Pentru o valoare M_4 a momentului, întreaga secțiune este solicitată plastic, în relația (16.6) $W_e = 0$ iar

$$M_4 = \sigma_c S_p = 2\sigma_c \int_0^{h/2} z dA = \sigma_c \frac{bh^2}{4}. \quad (16.8)$$

Se observă că $M_4 > M_2$ și anume $M_4 = 1,5M_2$, deci grinda din figura 16.3, a își pierde capacitatea portantă abia când momentul încovoietor este de 1,5 ori mai mare ca cel care produce curgerea în fibrele extreme, situație considerată drept stare limită în calculele efectuate prin metoda rezistențelor admisibile.

În calculul construcțiilor se utilizează *metoda capacității portante* (metoda stării limită) care ține cont de această rezervă de rezistență a barei. Se determină întâi sarcina limită care produce pierderea integrității structurale. Aplicând apoi acestei sarcini un coeficient de siguranță, se află sarcina capabilă a construcției.

16.2.1.2 Bare din material cu ecrusare liniară

Se consideră secțiunea din figura 16.5, a sollicitată elasto-plastic și anume sollicitată elastic între dreptele $z = \pm a$ și plastic pentru $|z| > a$. Diagrama tensiunilor este prezentată în figura 16.5, b .

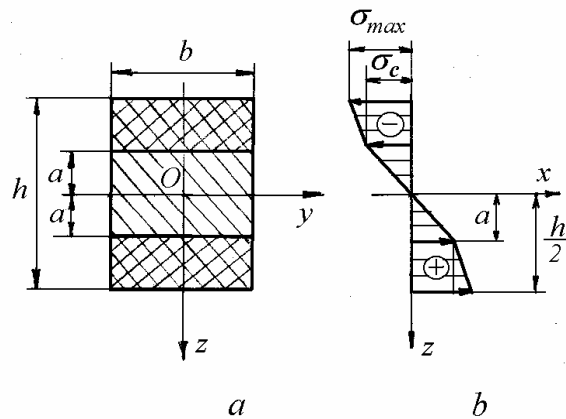


Fig. 16.5

În partea sollicitată elastic $\sigma = \frac{z}{a}\sigma_c$. La $z = \pm a$, $\sigma = \pm\sigma_c$. În partea sollicitată plastic

$$\sigma = \sigma_c + E_p(\varepsilon - \varepsilon_c) = \sigma_c + E_p\left(\frac{\sigma_c z}{Ea} - \frac{\sigma_c}{E}\right),$$

$$\sigma = \sigma_c \left[1 + \frac{E_p}{E} \left(\frac{z}{a} - 1 \right) \right]. \quad (16.9)$$

Din ecuația momentelor forțelor interioare față de axa neutră rezultă

$$M = 2 \int_0^a \frac{z}{a} \sigma_c z dA + 2 \int_a^{h/2} \sigma_c \left[1 + \frac{E_p}{E} \left(\frac{z}{a} - 1 \right) \right] z dA. \quad (16.10)$$

Înlocuind $dA = b dz$ și efectuând integralele, se obține

$$M = \sigma_c b \left[\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{3} + \frac{E_p}{E} \left(\frac{h^3}{12a} - \frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3} \right) \right], \quad (16.10, a)$$

care, pentru $E_p = 0$, coincide cu (16.7).

16.2.2 Articulația plastică

Fie o grindă simplu rezemată la capete (fig. 16.6), de secțiune dreptunghiulară, încărcată la mijloc cu forța F .

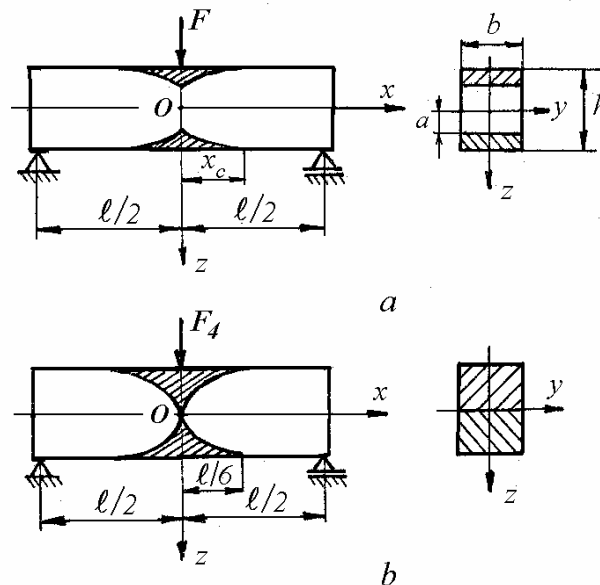


Fig. 16.6

Alegând originea axelor de coordonate la mijlocul grinzii, momentul încovoiător într-o secțiune x este

$$M = \frac{F}{2} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) = \frac{F\ell}{4} \left(1 - \frac{2x}{\ell} \right), \quad (16.11)$$

având valoarea maximă $F\ell/4$ la mijlocul grinzii.

Forța F_2 , care produce atingerea limitei de curgere în punctele extreme ale secțiunii de la mijlocul grinzii, se deduce din relația

$$M_2 = \frac{F_2 \ell}{4} = \sigma_c W_y = \sigma_c \frac{bh^2}{6}. \quad (16.12)$$

O forță $F > F_2$, care produce în secțiunea din mijloc o solicitare elasto-plastică, duce la apariția unor zone solicate plastic, desenate hașurat în figura 16.6, a.

În lungul barei, abscisa secțiunii în care se atinge limita de curgere în fibrele extreme se obține din egalitatea

$$\frac{F \ell}{4} \left(1 - \frac{2x_c}{\ell}\right) = \frac{F_2 \ell}{4}.$$

Rezultă (fig. 16.6, a)

$$x_c = \frac{\ell}{2} \left(1 - \frac{F_2}{F}\right). \quad (16.13)$$

Pentru stabilirea ecuației liniei de demarcație între zona elastică și cea plastică, se egalează expresiile (16.6, a) și (16.11)

$$\sigma_c b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{F \ell}{4} \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right).$$

Ținând cont de (16.12), după transformări, rezultă

$$a^2 = \frac{3h^2}{4} - \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right) \frac{F}{F_2}. \quad (16.14)$$

Linia de separație este o parabolă (fig. 16.6, a). La $x=0$, $a_{x=0}^2 = \frac{3h^2}{4} - \frac{h^2}{2} \frac{F}{F_2}$.

Când forța aplicată are valoarea $F_4 = 3F_2/2$ rezultă $a_{x=0}^2 = 0$. Cele două porțiuni solicate plastic (hașurate) se unesc și secțiunea de la mijlocul barei devine *articulație plastică* (fig. 16.6, b). Sub acțiunea forței exterioare, cele două jumătăți ale barei se rotesc una față de cealaltă. Bara se transformă în mecanism, nu mai este static determinată, și își pierde capacitatea portantă. Apare un "colaps plastic".

Înlocuind $F = 3F_2/2$ în (16.13) se obține abscisa secțiunii la dreapta căreia nu mai există deformații plastice $x_{c_{max}} = \ell/6$ (fig. 16.6, b).

Dacă bara simplu rezemată este încărcată cu o sarcină uniform distribuită, atunci demarcația între zona sollicitată plastic și cea sollicitată elastic se face prin linii drepte, concurente în mijlocul barei.

16.2.3 Tensiuni remanente

Fie o porțiune de bară sollicitată la încovoiere pură (fig. 16.7, *a*), dintr-un material cu $E_p = 0$. La o sollicitare cu un moment $M > M_2$, distribuția tensiunilor are forma din figura 16.7, *b*.

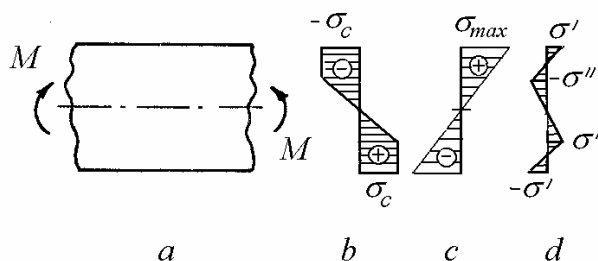


Fig. 16.7

Se pune problema determinării tensiunilor remanente din bară, după descărcare, deci după îndepărtarea sarcinilor exterioare.

Descărcarea barei (anularea lui M) este echivalentă cu aplicarea unui moment încovoiător egal și de sens contrar. La descărcare, materialele sollicitate elasto-plastic se comportă liniar, ca și cum materialul s-ar comporta elastic până la o tensiune $\sigma_{max} > \sigma_c$. În cazul barei studiate, se consideră că la aplicarea momentului de sens contrar distribuția tensiunilor este ca în figura 16.7, *c* unde $\sigma_{max} > \sigma_c$.

Suprapunând cele două diagrame, se obține distribuția tensiunilor remanente din figura 16.7, *d*, unde valorile extreme au expresiile

$$\sigma' = \sigma_{max} - \sigma_c = \frac{M}{W_y} - \sigma_c = \sigma_c \left(\frac{W_e + S_p}{W_y} - 1 \right), \quad (16.15)$$

$$\sigma'' = \sigma_c - \frac{a}{h/2} \sigma_{max} = \sigma_c \left(1 - \frac{2a}{h} \frac{W_e + S_p}{W_y} \right). \quad (16.16)$$

De exemplu, pentru $a = h/4$, la o secțiune dreptunghiulară cu baza b , se obține $M = \frac{11}{48} b h^2 \sigma_c$, $\sigma_{max} = \frac{11}{8} \sigma_c$ și tensiunile remanente au valorile

$$\sigma' = \frac{3}{8}\sigma_c, \quad \sigma'' = \frac{5}{16}\sigma_c.$$

Exemplul 16.1

Să se calculeze momentul încovoietor care produce articulație plastică într-o grindă cu secțiunea ca în figura 16.8, a dacă $\sigma_c = 260 \text{ N/mm}^2$ și $E_p = 0$. Care este valoarea tensiunilor remanente maxime din grindă, după înlăturarea sollicitării?

Rezolvare

Momentul care produce articulație plastică este $M_4 = \sigma_c S_p$ (16.16), unde

$$S_p = 2 \cdot (60 \cdot 20 \cdot 40 + 30 \cdot 20 \cdot 15) = 114 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Rezultă

$$M_4 = \sigma_c S_p = 260 \cdot 114 \cdot 10^3 = 29,64 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

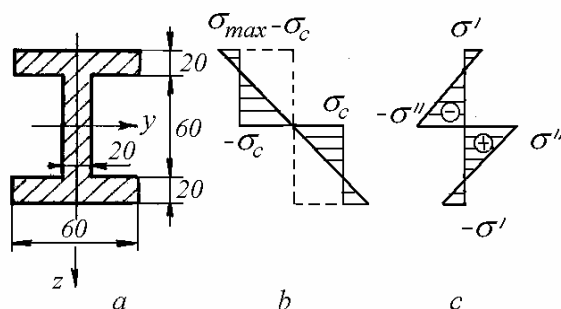


Fig. 16.8

Momentul de inerție axial al secțiunii este

$$I_y = \frac{60 \cdot 100^3}{12} - \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 4,28 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Modulul de rezistență axial are valoarea

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{4,28 \cdot 10^6}{50} = 8,56 \cdot 10^4 \text{ mm}^3.$$

Tensiunea maximă produsă de momentul M_4 în regim elastic este

$$\sigma_{max} = \frac{M_4}{W_y} = \frac{29,64 \cdot 10^6}{8,56 \cdot 10^4} = 364,26 \text{ N/mm}^2.$$

Valorile extreme ale tensiunilor remanente (fig. 16.8, b) sunt

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_{max} - \sigma_c = 364,26 - 260 = 86,26 \text{ N/mm}^2, \\ \sigma'' &= \sigma_c = 260 \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

Exemplul 16.2

La grinda de la Exemplul 16.1 să se determine valoarea momentului încovoietor pentru care tălpile secțiunii sunt solicate plastic iar inima este solicitată elastic. Care este valoarea tensiunilor remanente după înlăturarea acestui moment?

Rezolvare

Pentru inima elastică, modulul de rezistență axial este

$$W_e = \frac{20 \cdot 60^2}{6} = 12 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Momentul static al tălpilor solicate plastic are valoarea

$$S_p = 2 \cdot 60 \cdot 20 \cdot 40 = 96 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Rezultă momentul încovoietor elasto-plastic

$$M_3 = \sigma_c (W_e + S_p) = 260 \cdot (12 + 96) \cdot 10^3 = 28,08 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Tensiunea maximă produsă de momentul M_3 în regim elastic este

$$\sigma_{max} = \frac{M_3}{W_y} = \frac{28,08 \cdot 10^6}{8,56 \cdot 10^4} = 328 \text{ N/mm}^2.$$

Valorile extreme ale tensiunilor remanente sunt

$$\sigma' = \sigma_{max} - \sigma_c = 328 - 260 = 68 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma'' = \sigma_c - \frac{30}{50} \sigma_{max} = 260 - \frac{3}{5} 328 = 63,2 \text{ N/mm}^2.$$

16.3 Răsucirea elasto-plastică a barelor

Se consideră bare drepte, de secțiune axial-simetrică, la care este valabilă ipoteza secțiunii plane, solicate la răsucire. Printr-un raționament analog celui de la încovoiere, se poate arăta că distribuția tensiunilor tangențiale în lungul razei este asemenea curbei caracteristice a materialului.

În continuare se consideră doar materiale elastice – ideal plastice (schematizarea lui Prandtl), la care diagrama caracteristică $\tau - \gamma$ are alura din figura 16.1, b cu un traseu liniar până la limita de curgere τ_c , urmat de o porțiune cu modul de plasticitate nul.

16.3.1 Relația între momentul de răsucire și tensiuni

Fie o bară de secțiune circulară, sollicitată la răsucire (fig. 16.9) de un cuplu M_t aplicat static.

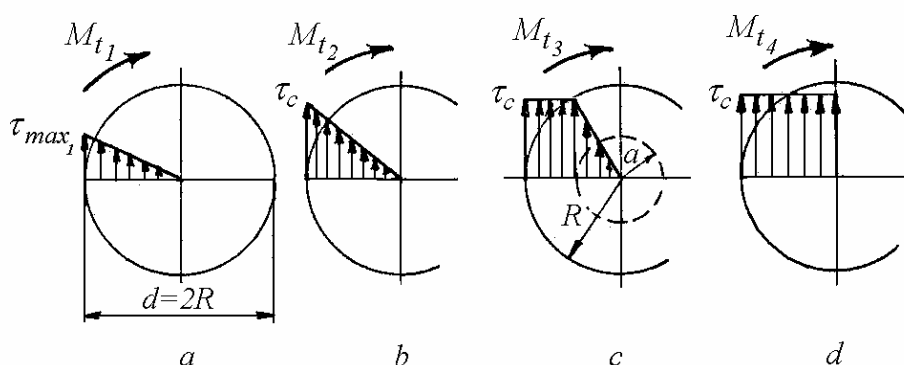


Fig. 16.9

Pentru o valoare relativ mică a momentului de răsucire M_{t_1} , secțiunea este sollicitată elastic, distribuția tensiunilor tangențiale în lungul razei este liniară (fig. 16.9, a), valoarea maximă fiind

$$\tau_{max_1} = \frac{M_{t_1}}{W_p}.$$

Dacă M_t crește, tensiunea tangențială maximă devine egală cu limita de curgere τ_c (fig. 16.9, b) pentru un moment de răsucire de valoare

$$M_{t_2} = \tau_c W_p = \tau_c \frac{\pi d^3}{16}. \quad (16.17)$$

La o creștere a momentului de răsucire peste această valoare, secțiunea este sollicitată elasto-plastic (fig. 16.9, c). Distribuția tensiunilor tangențiale în lungul razei se aseamănă cu curba caracteristică schematizată de Prandtl, deoarece unghiul de lunecare specifică γ variază liniar cu raza.

Fie a raza cercului care marchează limita între zona elastică și cea plastică.

Pentru

$$0 \leq r \leq a, \quad \tau = \frac{r}{a} \tau_c, \quad a \leq r \leq R, \quad \tau = \tau_c. \quad (16.18)$$

Între momentul de răsucire M_t și tensiunile τ se stabilește relația de echivalență

$$M_t = \int_A \tau r \, dA = 2\pi \int_0^R \tau r^2 \, dr$$

care, ținând cont de (16.18), se scrie

$$M_t = 2\pi \int_0^a \frac{r}{a} \tau_c r^2 \, dr + 2\pi \int_a^R \tau_c r^2 \, dr.$$

Deci

$$M_{t_3} = \tau_c \frac{\pi}{6} (4R^3 - a^3). \quad (16.19)$$

Pe măsură ce momentul de răsucire crește, zona elastică centrală se micșorează și la limită, pentru valoarea M_{t_4} , toată secțiunea barei ajunge în stare plastică. Bara își pierde capacitatea portantă.

Înlocuind $a=0$ în relația (16.19), se obține

$$M_{t_4} = \frac{2\pi}{3} \tau_c R^3 = \tau_c \frac{\pi d^3}{12} = \frac{4}{3} M_{t_2}. \quad (16.20)$$

Deci în cazul răsucirii barelor de secțiune circulară, există o rezervă de rezistență de 33% față de starea elastică în care se atinge τ_c numai în punctele de pe contur.

16.3.2 Tensiuni remanente la răsucire

O bară solicitată la răsucire în regim elasto-plastic, după descărcare nu revine la starea inițială. În bară rămân deformații permanente ireversibile care dau naștere la tensiuni remanente. Valorile acestora se calculează considerând că descărcarea este echivalentă cu aplicarea unui moment de răsucire egal și de sens contrar celui inițial, sub acțiunea căruia se produc tensiuni elastice.

În figura 16.10, *a* s-a reprezentat diagrama tensiunilor produse de momentul de răsucire M_t inițial, iar în figura 16.10, *b* diagrama tensiunilor produse de momentul M_t de descărcare.

Acesta din urmă produce tensiuni distribuite liniar în lungul razei, având valoarea maximă

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p},$$

care, pe baza relației (16.19), se mai scrie

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \tau_c \left(1 - \frac{a^3}{4R^3} \right). \quad (16.21)$$

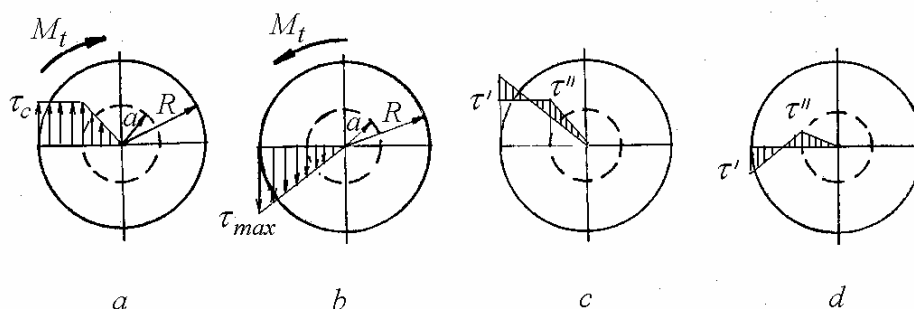


Fig. 16.10

Prin suprapunerea celor două diagrame (fig. 16.10, c), rezultă valorile extreme ale tensiunilor remanente

$$\tau' = \tau_{max} - \tau_c = \frac{\tau_c}{3} \left(1 - \frac{a^3}{R^3} \right), \quad (16.22, a)$$

$$\tau'' = \tau_c - \frac{a}{R} \tau_{max} = \tau_c \left(1 - \frac{4}{3} \frac{a}{R} + \frac{a^4}{3R^4} \right). \quad (16.22, b)$$

De exemplu, pentru $a = R/2$, se obține

$$\tau' = \frac{7}{24} \tau_c, \quad \tau'' = \frac{17}{48} \tau_c.$$

În figura 16.10, d diagrama tensiunilor remanente este reprezentată față de o linie de referință perpendiculară pe direcția acestora.

Exemplul 16.3

O bară dintr-un material elastic - ideal plastic cu $\tau_c = 200 \text{ N/mm}^2$ are secțiune inelară, cu diametrele $D = 100 \text{ mm}$ și $d = 80 \text{ mm}$. Se cere momentul de torsiune care produce deformații plastice în întreaga secțiune. Care este valoarea tensiunilor remanente după înlăturarea acestui moment?

Rezolvare

Momentul de torsiune pentru inelul deformat total plastic este

$$M_{t4} = 2\pi\tau_c \int_{d/2}^{D/2} r^2 dr = \frac{\pi\tau_c}{12} (D^3 - d^3) = \frac{\pi \cdot 200}{12} (100^3 - 80^3) = 255,5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}.$$

Modulul de rezistență polar al secțiunii inelare are valoarea

$$W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi(100^4 - 80^4)}{16 \cdot 100} = 1,159 \cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$

Tensiunea tangențială maximă produsă de M_{t4} în regim elastic este

$$\tau_{max} = \frac{M_{t4}}{W_p} = \frac{255,5 \cdot 10^5}{1,159 \cdot 10^5} = 220,4 \text{ N/mm}^2.$$

Valorile extreme ale tensiunilor remanente sunt

$$\text{la exterior, } \tau' = \tau_{max} - \tau_c = 220,4 - 200 = 20,4 \text{ N/mm}^2,$$

$$\text{la interior, } \tau'' = \tau_c - \frac{d}{D} \tau_{max} = 200 - \frac{8}{10} 220,4 = 23,6 \text{ N/mm}^2.$$

16.4 Calculul sistemelor static nedeterminate prin metoda stării limită

Fie sistemul simplu static nedeterminat din figura 16.11, *a*. Cât timp solicitarea este în regim elastic, diagrama momentelor încovoietoare are forma din figura 16.11, *b*, cu valoarea maximă în încastrare.

Fie F_1 valoarea forței F la care secțiunea din încastrare este solicitată total plastic. În încastrare se formează o articulație plastică în care ia naștere un moment M_p (fig. 16.11, *c*). Sistemul încă nu și-a pierdut capacitatea portantă, el devenind un sistem static determinat, deoarece încastrarea s-a transformat în articulație.

Dacă valoarea forței F crește în continuare, momentul în fosta încastrare rămâne constant M_p , în schimb crește valoarea momentelor încovoietoare în bara articulată la capete, la care momentul maxim apare în dreptul forței. Când acesta atinge valoarea M_p , în secțiunea din dreptul forței se formează o nouă articulație plastică și abia acum, pentru o valoare F_p a forței, sistemul își pierde capacitatea portantă (fig. 16.11, *d*).

Ecuția de echilibru față de reazemul din stânga se scrie

$$V_2 \ell - F_p \frac{\ell}{2} + M_p = 0. \quad (16.23)$$

Pentru jumătatea din dreapta a barei, ecuația de echilibru față de articulația centrală este

$$M_p - V_2 \frac{\ell}{2} = 0. \quad (16.24)$$

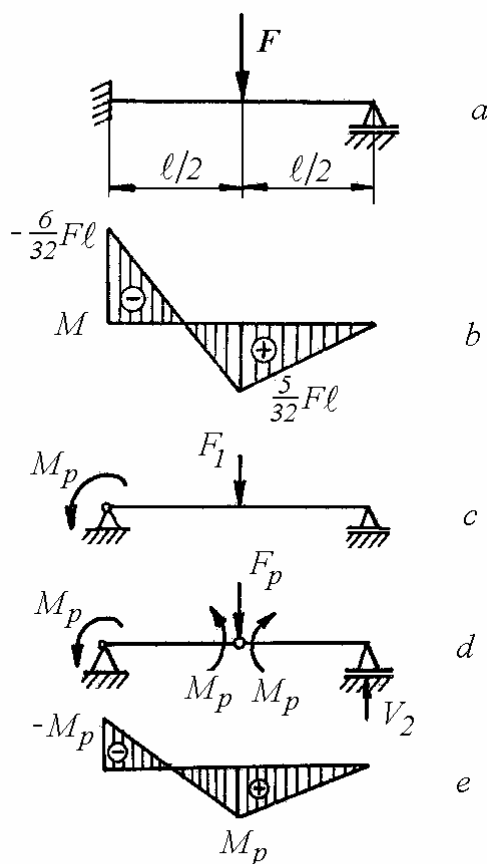


Fig. 16.11

Eliminând V_2 între ecuațiile (16.23) și (16.24), rezultă

$$F_p = \frac{6M_p}{\ell}. \quad (16.25)$$

În cazul particular al unei bare cu secțiunea dreptunghiulară, momentul încovoiator limită este $M_p = \sigma_c S_p = \sigma_c \frac{bh^2}{4}$, deci relația (16.25) devine

$$F_p = \frac{3}{2} \sigma_c \frac{bh^2}{\ell}. \quad (16.26)$$

Forța F' care produce în încadrare o tensiune maximă egală cu limita de curgere σ_c se calculează din ecuația

$$\frac{6F'\ell}{32} = \sigma_c W_y = \sigma_c \frac{bh^2}{6}.$$

Rezultă

$$F' = \frac{8}{9} \sigma_c \frac{bh^2}{\ell}, \quad (16.27)$$

prin urmare

$$F_p = \frac{27}{16} F' = 1,69 F' \quad (16.28)$$

ceea ce arată rezerva de rezistență din sistem.

16.5 Solicități elasto-plastice în tuburi cu pereți groși

La barele solicitate elasto-plastic, condiția de plasticitate apare atunci când tensiunea maximă atinge valoarea limitei de curgere. Într-un tub cu pereți groși există o stare bi- sau triaxială de tensiuni. Pentru a defini inițierea curgerii plastice este necesar un criteriu de curgere, așa cum s-a arătat în Capitolul 10.

În continuare se consideră tuburi din material elastic - ideal plastic, solicitate la presiune interioară și se adoptă criteriul de curgere Tresca [6, 38, 65].

Tensiunea maximă este tensiunea circumferențială la interiorul tubului. Pe măsură ce presiunea interioară p_i crește, deformațiile plastice apar întâi la interior, apoi se dezvoltă pe grosimea peretelui până ce întregul tub este deformat plastic. La un stadiu în care deformația plastică a cuprins numai o parte a peretelui tubului, acesta poate fi considerat un cilindru eterogen, având la interior un tub (deformat) plastic și la exterior un tub (deformat) elastic.

16.5.1 Tensiuni radiale și circumferențiale

Fie a raza interioară a tubului, c – raza exterioară și b – raza interfeței între tubul plastic și cel elastic. Între cele două tuburi se poate considera că acționează o presiune p_b .

La interiorul tubului elastic exterior, sollicitat de presiunea interioară p_b , tensiunile sunt date de relațiile (14.17)

$$\sigma_t, \sigma_r = \frac{p_b b^2}{c^2 - b^2} \left(1 \pm \frac{c^2}{b^2} \right). \quad (16.29)$$

Tensiunea tangențială maximă are valoarea

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{p_b b^2}{c^2 - b^2}. \quad (16.30)$$

Când la interfață se atinge curgerea, conform criteriului Tresca

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_c}{2} = \frac{p_b b^2}{c^2 - b^2},$$

deci presiunea la interfață are valoarea

$$p_b = \sigma_c \frac{c^2 - b^2}{2c^2}. \quad (16.31)$$

Pe baza acestei valori se pot calcula tensiunile în tubul elastic, utilizând relațiile (14.16).

Pentru a determina presiunea interioară p_i care produce deformații plastice până la raza b , se consideră ecuația de echilibru (14.1) aplicată tubului plastic, în care s-a înlocuit tensiunea tangențială maximă din relația (16.30)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0, \quad r \frac{d\sigma_r}{dr} - 2\tau_{max} = 0. \quad (16.32)$$

Conform criteriului lui Tresca

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_c}{r}. \quad (16.33)$$

Prin integrare se obține

$$\sigma_r = \sigma_c \ln r + C. \quad (16.34)$$

Constanta de integrare C se determină din condiția ca la $r=b$, $\sigma_r = -p_b$. Rezultă $C = -p_b - \sigma_c \ln b$, care înlocuită în (16.34) conduce la

$$\sigma_r = -\sigma_c \ln \frac{b}{r} - p_b. \quad (16.35)$$

Înlocuind în (16.35) presiunea p_b din relația (16.31) se obține distribuția tensiunilor radiale în zona plastică

$$\sigma_r = -\sigma_c \ln \frac{b}{r} - \frac{\sigma_c}{2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right). \quad (16.36)$$

Tensiunile circumferențiale sunt $\sigma_t = \sigma_c + \sigma_r$, deci

$$\sigma_t = \sigma_c \left(1 - \ln \frac{b}{r} \right) - \frac{\sigma_c}{2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right). \quad (16.37)$$

Din relația (16.36), punând condiția ca la $r = a$, $\sigma_r = -p_i$, se obține presiunea interioară p_i care produce curgere până la raza b

$$p_i = \sigma_c \ln \frac{b}{a} + \frac{\sigma_c}{2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right). \quad (16.38)$$

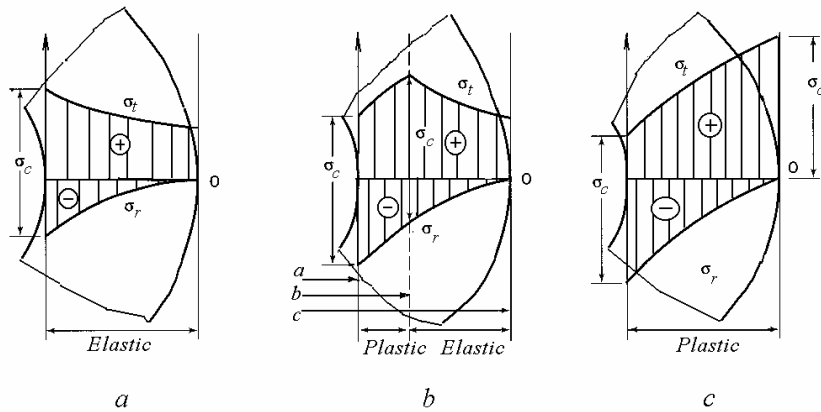


Fig. 16.12

Presiunea interioară p_{max} care produce curgerea pe toată grosimea peretelui tubului se obține înlocuind $b = c$ în ecuația (16.38)

$$p_{max} = \sigma_c \ln \frac{c}{a}. \quad (16.39)$$

În acest caz, din relațiile (16.36) și (16.37) se obțin următoarele expresii ale tensiunilor

$$\sigma_r = -\sigma_c \ln \frac{c}{r}, \quad (16.40)$$

$$\sigma_t = \sigma_c \left(1 - \ln \frac{c}{r} \right). \quad (16.41)$$

În figura 16.12 s-au reprezentat diagramele de variație ale tensiunilor în lungul razei, pentru un tub cu $c = 2a$.

Pe măsură ce presiunea interioară crește, diagrama tensiunilor circumferențiale se modifică, de la distribuția cu maximum la interior (fig. 16.12, *a*), la distribuția cu maximum la interfața elasto-plastică (fig. 16.12, *b*) și în final la distribuția cu maximum la exteriorul tubului (fig. 16.12, *c*).

16.5.2 Autofretajul

Autofretajul este o metodă prin care se produc tensiuni circumferențiale remanente de compresiune în peretele interior al unui tub cu pereți groși. Aceasta permite aplicarea ulterioară a unei presiuni interioare de lucru mai mari, pentru atingerea aceleiași tensiuni circumferențiale totale.

Un cilindru cu presiune interioară este solicitat până la o valoare la care deformația plastică a pătruns pe o anumită grosime a peretelui. La înlăturarea presiunii, zona elastică exterioară tinde să revină la dimensiunile inițiale, dar este parțial împiedicată de deformația permanentă a materialului cu deformații plastice remanente de la interior. Sistemul fiind în echilibru, porțiunea de la interior este supusă la tensiuni circumferențiale de compresiune, în timp ce în zona elastică de la exterior apar tensiuni circumferențiale de întindere.

Tensiunile remanente se calculează suprapunând peste tensiunile elasto-plastice tensiuni elastice de descărcare produse de aceeași presiune interioară. Tensiunile radiale sunt de compresiune, cu valori nule pe suprafețele de la interior și exterior. Tensiunile circumferențiale sunt de compresiune la interior și de întindere în porțiunea de la exterior, cu valori nule pe suprafața exterioară.

Exemplul 16.4

Un tub cu pereți groși cu raza interioară $a = 100$ mm și raza exterioară $c = 225$ mm este autofretat. Dacă $\sigma_c = 400$ MPa, să se calculeze: a) presiunea interioară necesară pentru a produce deformații plastice în 20% din grosimea peretelui; b) valorile tensiunilor radiale și circumferențiale produse de această presiune la interior, la interfața plastic/elastică și la exteriorul tubului; c) tensiunile circumferențiale remanente în tub după anularea presiunii interioare.

Rezolvare

La interfața plastic/elastică, raza este

$$b = a + 0,2(c - a) = 1,25a = 125 \text{ mm}.$$

Din relația (16.38) se calculează presiunea interioară

$$p_i = 400 \ln \frac{125}{100} + \frac{400}{2} \left[1 - \left(\frac{1,25a}{2,25a} \right)^2 \right] = 227,5 \text{ MPa} .$$

Tensiunile produse de această presiune au următoarele valori:

$$\text{La } r = a, \sigma_r = -227,5 \text{ MPa}, \sigma_t = 400 - 227,5 = 172,5 \text{ MPa} .$$

La $r = b$, înlocuind $r = b$ în ecuația (16.36) se obține

$$\sigma_r = -\frac{400}{2} \left[1 - \left(\frac{1,25a}{2,25a} \right)^2 \right] = -138,3 \text{ MPa} ,$$

$$\sigma_t = \sigma_c + \sigma_r = 400 - 227,5 = 172,5 \text{ MPa} .$$

La $r = c$, $\sigma_r = 0$ și din ecuația (16.29)

$$\sigma_t = 138,3 \frac{2}{1,8^2 - 1} = 123,5 \text{ MPa} .$$

Tensiunile elastice de descărcare se obțin din relațiile stabilite în § 14.1.1, utilizând $p_i = 227,5 \text{ MPa}$. Tensiunile remanente se obțin apoi scăzând acestea din cele calculate anterior pentru solicitarea elasto-plastică.

La $r = a$, tensiunile elastice sunt

$$\sigma_t = 227,5 \frac{2,25^2 + 1}{2,25^2 - 1} = 339,5 \text{ MPa} .$$

deci tensiunile circumferențiale remanente au valoarea

$$\sigma_t^R = 172,5 - 339,5 = -167 \text{ MPa} .$$

La $r = b$, tensiunile elastice sunt

$$\sigma_t = 227,5 \frac{1,8^2 + 1}{2,25^2 - 1} = 237,5 \text{ MPa} .$$

iar tensiunile circumferențiale remanente

$$\sigma_t^R = 261,7 - 237,5 = 24,2 \text{ MPa} .$$

La $r = c$, tensiunile elastice sunt

$$\sigma_t = 227,5 \frac{2}{2,25^2 - 1} = 112 \text{ MPa} .$$

iar tensiunile circumferențiale remanente au valoarea

$$\sigma_t^R = 123,5 - 112 = 11,5 \text{ MPa} .$$

16.6 Solicitări elasto-plastice în discuri în rotație

Într-un disc cu gaură centrală, tensiunea circumferențială maximă apare la interior, unde tensiunea radială este zero. Pe măsura creșterii turației, curgerea plastică apare întâi la interior, apoi se răspândește spre exterior până cuprinde întregul disc.

Fie a și c razele interioară și exterioară ale discului de grosime constantă. Conform criteriului lui Tresca deformațiile plastice apar atunci când tensiunea tangențială maximă atinge valoarea

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_t - 0}{2} = \frac{\sigma_c}{2}, \quad (16.42)$$

deci atunci când $\sigma_t = \sigma_c$.

Înlocuind $r = a$ în relația (14.75) s-a obținut viteza unghiulară ω_c la care apare curgerea în peretele interior al discului (14.77)

$$\omega_c = \sqrt{\frac{4\sigma_c}{\rho[(3+\nu)c^2 + (1-\nu)a^2]}}. \quad (16.43)$$

unde ρ este densitatea materialului iar ν - coeficientul lui Poisson.

Pentru determinarea vitezei unghiulare la care zona plastică ajunge la o rază b , se pornește de la ecuația de echilibru (14.67)

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot r) = \sigma_t - \rho\omega^2 r^2. \quad (16.44)$$

Înlocuind $\sigma_t = \sigma_c$ și integrând, se obține

$$\sigma_r r = \sigma_c r - \rho\omega^2 \frac{r^3}{3} + B$$

sau

$$\sigma_r = \sigma_c - \frac{\rho}{3}\omega^2 r^2 + \frac{B}{r}. \quad (16.45)$$

Constanta de integrare B se determină din condiția ca la $r = a$, $\sigma_r = 0$:

$$B = -a\sigma_c + \frac{\rho}{3}\omega^2 a^3.$$

Înlocuind constanta B în (16.45) se obține expresia tensiunilor radiale în zona plastică

$$\sigma_r = \sigma_c \left(1 - \frac{a}{r}\right) + \frac{\rho}{3}\omega^2 r^2 \left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right). \quad (16.46)$$

La $r = b$ relația (16.46) devine

$$\sigma_r = \sigma_c \left(1 - \frac{a}{b}\right) - \frac{\rho \omega^2}{3} \frac{b^3 - a^3}{b}. \quad (16.47)$$

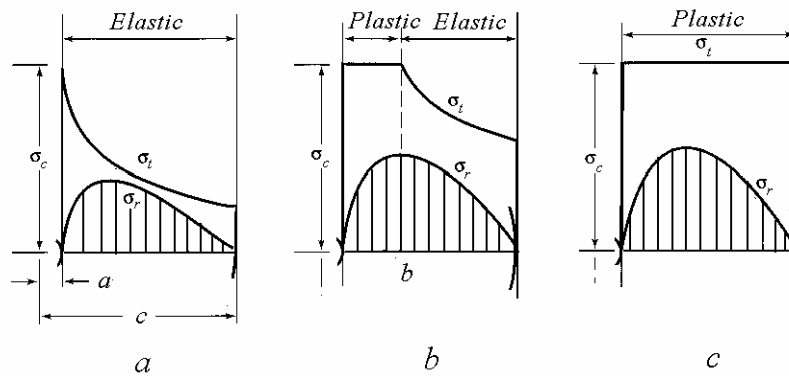


Fig. 16.13

Pentru zona elastică, tensiunile se calculează cu relațiile (14.70) și (14.71)

$$\sigma_r = \bar{A} - \frac{\bar{B}}{r^2} - k_1 r^2, \quad (16.48)$$

$$\sigma_t = \bar{A} + \frac{\bar{B}}{r^2} - k_2 r^2, \quad (16.49)$$

în care

$$k_1 = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2, \quad k_2 = \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2. \quad (16.50)$$

Constantele de integrare \bar{A} și \bar{B} se determină din condițiile la limită pentru zona elastică: la $r = b$, $\sigma_t = \sigma_c$ și la $r = c$, $\sigma_r = 0$.

Rezultă

$$\bar{A} = \frac{1}{b^2 + c^2} (b^2 \sigma_c + b^4 k_2 + c^4 k_1),$$

$$\bar{B} = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} (\sigma_c + b^2 k_2 - c^2 k_1).$$

Deci, pentru zona elastică, la $r = b$

$$\sigma_r = \frac{1}{b^2 + c^2} (b^2 \sigma_c + b^4 k_2 + c^4 k_1) - \frac{c^2}{b^2 + c^2} (\sigma_c + b^2 k_2 - c^2 k_1) - k_1 b^2. \quad (16.51)$$

Egalând expresiile (16.47) și (16.51) se obține viteza unghiulară care produce deformații plastice până la raza b .

Înlocuind $b=c$ în relația (16.47) și punând condiția de pe contur $\sigma_r = 0$, se obține viteza unghiulară ω_p la care tot discul este deformat plastic

$$\omega_p = \sqrt{\frac{3 \sigma_e}{\rho (c^2 + ac + a^2)}} . \quad (16.52)$$

În figura 16.13 se prezintă distribuția tensiunilor într-un disc cu $c = 10a$.

Dacă un disc cu gaură centrală este rotit cu o turație care produce deformații plastice la interior pe o anumită grosime și apoi este oprit, în disc rămân tensiuni remanente ca și la tubul supus la presiune interioară. Tensiunile circumferențiale de compresiune de la interior permit utilizarea ulterioară a discului la o turație de lucru mai mare decât în cazul discului solicitat elastic.

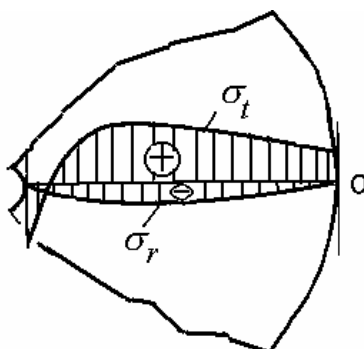


Fig. 16.14

Procedeul se numește *supraturare* și produce tensiuni remanente cu distribuții asemănătoare tensiunilor reziduale din tuburile cu presiune interioară (fig. 16.14). Calculul acestora se face suprapunând peste tensiunile de la solicitarea elasto-plastică, tensiuni elastice de descărcare produse la aceeași viteză unghiulară.

17.

SOLICITĂRI DINAMICE

Variația în timp a încărcărilor aplicate sistemelor elastice produce mișcarea relativă a elementelor componente ale acestora, ceea ce impune considerarea efectului forțelor masice și al propagării undelor elastice. După cum este necesară sau nu introducerea efectului forțelor masice, calculul de rezistență se face la *solicitări dinamice* sau la *solicitări statice*.

În capitolele precedente s-a studiat comportarea corpurilor elastice la *solicitări statice*. Acestea sunt produse de *sarcini statice*, care se aplică lent asupra corpurilor în repaus, crescând monoton de la zero la valoarea nominală și rămânând apoi constante timp nelimitat. Spre deosebire de acestea, *solicitările dinamice* sunt produse de sarcini cu variație bruscă în timp, de sarcini periodice sau cu variație armonică în timp, precum și de forțe de inerție produse de accelerații mari, datorite mișcării de translație sau rotație a pieselor respective.

În general, sarcinile dinamice se caracterizează prin variația în timp a intensității, direcției sau punctului de aplicație al forțelor. Forțele de inerție care apar datorită mișcării corpurilor elastice depind atât de mărimea și distribuția masei proprii a corpului solicitat, cât și de accelerația imprimată. Ele produc deformații și tensiuni suplimentare în piesele solificate dinamic.

De cele mai multe ori, rezolvarea problemelor de solicitări dinamice se face prin reducerea lor la probleme de solicitări statice. Se urmărește determinarea unei sarcini fictive care, acționând static asupra unei piese, produce aceleași tensiuni și deformații ca și sarcina reală, care acționează dinamic.

17.1 Coeficientul dinamic

Se notează cu F sarcina reală care acționează dinamic. Se determină o sarcină fictivă F_d care, acționând static asupra unei piese, produce aceleași deformații și tensiuni ca și sarcina reală. Se stabilește relația

$$F_d = \psi F, \quad (17.1)$$

în care ψ se numește *coeficient dinamic*. În cazul șocurilor, acesta mai poartă numele de *multiplicator de impact*.

Ca o consecință a relațiilor liniare între forțe și deformații, pe de o parte, și între forțe și tensiuni, pe de altă parte, în virtutea relației (17.1), dacă forța F aplicată static produce tensiunea σ_{st} , respectiv deformația δ_{st} , atunci forța F_d produce tensiunea

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st}, \quad (17.2)$$

respectiv deformația

$$\delta_d = \psi \delta_{st}, \quad (17.3)$$

acestea reprezentând de fapt valorile tensiunii și deformației produse de forța F aplicată dinamic.

Valoarea coeficientului dinamic ψ depinde de legea de variație în timp a sarcinii dinamice și de caracteristicile dinamice ale piesei solicitate. În continuare se tratează câteva cazuri simple, în care este posibilă determinarea analitică a valorii coeficientului dinamic. Atunci când acest lucru nu este posibil, datorită complexității structurii sau dificultății de stabilire a dependenței de timp a solicitării, se recurge la determinarea experimentală a coeficientului dinamic, măsurând σ_d și σ_{st} .

17.2 Solicități prin forțe de inerție constante

Piesele în mișcare de rotație cu viteză unghiulară constantă (palete de turbină, pale de elice, discuri și volanți) sau în mișcare de translație cu accelerație constantă (cabluri de macara sau de ascensor) sunt solicitate prin forțe de inerție constante, deoarece accelerațiile depind foarte puțin de deformațiile pieselor. Calculul de rezistență se face la fel ca la solicitări statice, comportarea materialelor și modul de acționare al sarcinilor fiind identice.

17.2.1 Cablu în translație longitudinală

O greutate F este suspendată de un cablu elastic (fig. 17.1), având greutatea pe unitatea de lungime egală cu q și aria secțiunii transversale A .

În repaus, forța axială în secțiunea x este

$$N_{st} = F + qx.$$

La ridicarea greutății cu accelerația constantă a , forța axială în secțiunea x devine

$$N_d = N_{st} + F_i = F + q x + \frac{F + q x}{g} a = (F + q x) \left(1 + \frac{a}{g} \right), \quad (17.4)$$

unde F_i este forța de inerție corespunzătoare masei situate sub secțiunea x .

Relația (17.4) se poate scrie sub forma

$$N_d = \left(1 + \frac{a}{g} \right) N_{st} = \psi N_{st}, \quad (17.5)$$

unde ψ este coeficientul dinamic.

Tensiunile se calculează cu relația (17.2)

$$\sigma_d = \left(1 + \frac{a}{g} \right) \sigma_{st},$$

unde

$$\sigma_{st} = \frac{N_{st}}{A} = \frac{F + q x}{A}.$$

La coborârea sarcinii, accelerația $a < 0$, coeficientul dinamic $\psi < 1$, deci $\sigma_d < \sigma_{st}$.

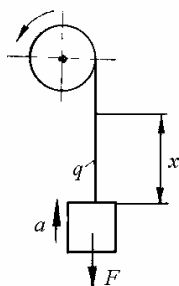


Fig. 17.1

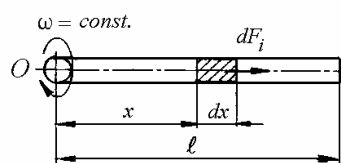


Fig. 17.2

17.2.2 Bară în rotație

Se consideră o bară dreaptă, cu secțiunea constantă A , care se rotește într-un plan orizontal, cu viteza unghiulară $\omega = const.$ în jurul punctului O (fig. 17.2).

Asupra unui element de lungime dx al barei acționează forța de inerție

$$dF_i = a_c dm = x \omega^2 \rho A dx, \quad (17.6)$$

unde ρ este densitatea materialului barei.

Rezultă că asupra barei acționează o sarcină longitudinală cu distribuție liniară

$$q_\ell = \frac{dF_i}{dx} = \omega^2 \rho A x ,$$

care soliciță bara la întindere.

În secțiunea x , forța axială este

$$N_x = \omega^2 \rho \int_x^\ell A x dx = \frac{1}{2} \omega^2 \rho A (\ell^2 - x^2), \quad (17.7)$$

iar tensiunea normală corespunzătoare este

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \omega^2 \rho (\ell^2 - x^2).$$

Tensiunea maximă apare în secțiunea $x = 0$, având valoarea

$$\sigma_{max} = \frac{\rho}{2} \ell^2 \omega^2, \quad (17.8)$$

independentă de aria secțiunii transversale.

17.2.3 Tensiuni în palete

Turbinele și compresoarele au palete de forme relativ complicate, calculul exact al tensiunilor fiind laborios. Pentru proiectarea preliminară, se folosesc metode aproximative, care neglijează torsiunea inițială a paletii și deplanarea secțiunilor transversale. Se calculează tensiunile centrifugale de întindere și cele de încovoire produse de excentricitatea paletii.

17.2.3.1 Tensiuni centrifugale de întindere

Se consideră cunoscută variația ariei secțiunii transversale cu raza. De obicei se utilizează valori discrete ale ariei secțiunii transversale a paletii la diferite raze (fig. 17.3).

La o paletă fără talon superior, forța centrifugă care acționează asupra unui element de paletă de grosime dr este (17.6)

$$dF_i = \rho \omega^2 A r dr . \quad (17.9)$$

Forța axială la raza r este

$$N_r = \rho \omega^2 \int_r^{r_1} A r \, dr . \quad (17.10)$$

Tensiunea normală în secțiunea situată la raza r , de arie A_r , este

$$\sigma_r = \frac{N_r}{A_r} = \frac{\rho \omega^2}{A_r} \int_r^{r_1} A r \, dr . \quad (17.11)$$

Pentru calcule numerice, relația (16.11) se poate aproxima sub forma

$$\sigma_r = \frac{\rho \omega^2}{A_r} \sum_{i=1}^n \frac{A_i r_i + A_{i+1} r_{i+1}}{2} (r_i - r_{i+1}) . \quad (17.11,a)$$

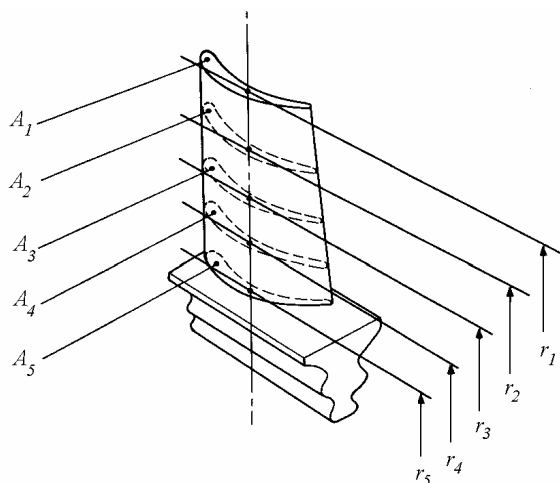


Fig. 17.3

Exemplul 17.1

Se cere să se calculeze tensiunile centrifugale într-o paletă de turbină, din material cu densitatea $\rho = 8250 \text{ kg/m}^3$, montată pe un disc care se rotește cu turația $n = 10000 \text{ rot/min}$, având următoarea variație a ariei secțiunii transversale în funcție de rază (fig. 17.3):

$$\begin{aligned} r_1 &= 371 \text{ mm}, & A_1 &= 140,64 \text{ mm}^2, \\ r_2 &= 349 \text{ mm}, & A_2 &= 152,90 \text{ mm}^2, \\ r_3 &= 317 \text{ mm}, & A_3 &= 175,48 \text{ mm}^2, \\ r_4 &= 286 \text{ mm}, & A_4 &= 209,67 \text{ mm}^2, \end{aligned}$$

$$r_5 = 263 \text{ mm}, \quad A_5 = 243,87 \text{ mm}^2.$$

Rezolvare

Utilizând formula (16.11, a), se obțin următoarele valori:

$$\sigma_{r_1} = 31,62 \text{ MPa}, \quad \sigma_{r_2} = 98,16 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{r_3} = 174,74 \text{ MPa}, \quad \sigma_{r_4} = 22,38 \text{ MPa}, \quad \sigma_{r_5} = 24,70 \text{ MPa}.$$

17.2.3.2 Tensiuni de încovoiere

Atunci când centrele de greutate ale secțiunilor transversale ale unei palete sunt deplasate față de o linie radială care trece prin centrul de greutate al bazei paletei, forța centrifugă produce încovoiere. Aceste deplasări pot fi rezultatul unor imperfecțiuni de prelucrare sau erori de montaj, dar pot fi introduse și intenționat pentru a echilibra încovoierea produsă de presiunea gazului.

În figura 17.4 se arată secțiunea unei palete de turbină, indicându-se direcția *axială*, perpendiculară pe planul discului, direcția *tangențială*, perpendiculară pe rază în planul discului, direcțiile principale de inerție, notate *Max* și *Min*, și coordonatele punctelor cele mai îndepărtate de aceste axe, în care se calculează tensiunile de încovoiere.

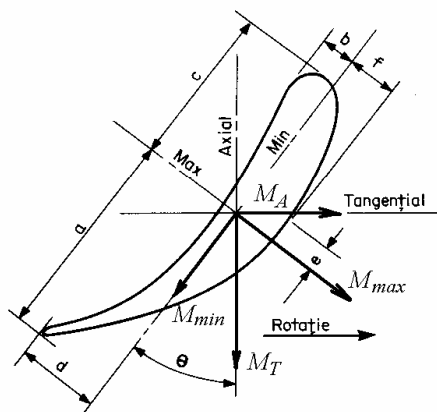


Fig. 17.4

Momentul încovoielor tangențial

Excentricitatea paletei în planul discului face ca forța centrifugă să producă un moment încovoielor numit "tangențial", dirijat în direcție axială.

Fie Δ excentricitatea centrului de greutate G_x al secțiunii de la raza r_x , față de direcția forței centrifuge care trece prin centrul de greutate G al paletei

(fig. 17.5, a). Se notează e_r și e_x distanțele de la punctele G și G_x la o linie de referință radială.

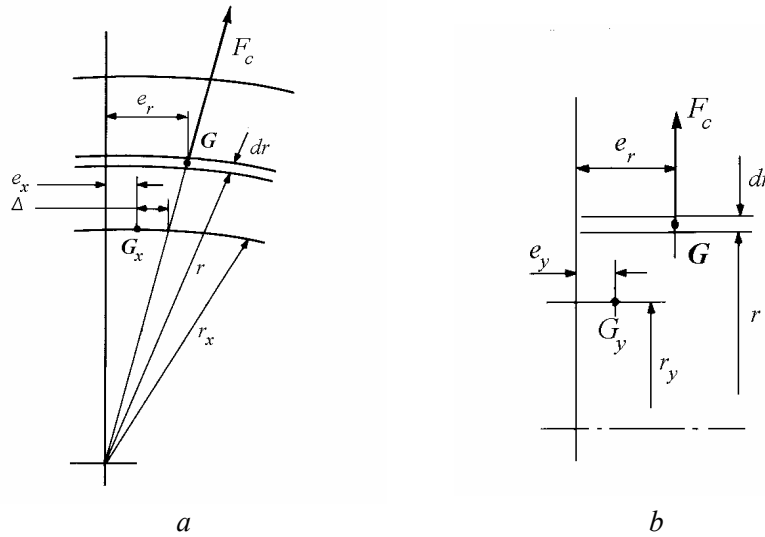


Fig. 17.5

Forța centrifugă care acționează asupra unui element de grosime dr este (17.9). Momentul încovoietor în secțiunea de rază r_x produs de componenta forței paralelă cu linia de referință este

$$dM_T = \rho \omega^2 A r dr \cdot \Delta = \rho \omega^2 A (\Delta \cdot r) dr. \quad (17.12)$$

Deoarece

$$\frac{e_r}{r} = \frac{\Delta + e_x}{r_x}, \quad (17.13)$$

relația (17.12) se scrie

$$dM_T = \rho \omega^2 A (e_r r_x - r e_x) dr.$$

Momentul încovoietor tangențial în secțiunea de rază r_x este

$$M_T = \rho \omega^2 \int_{r_x}^{r_l} A (e_r r_x - r e_x) dr. \quad (17.14)$$

Pentru calcule numerice, relația (17.14) se poate aproxima prin

$$M_T = \rho \omega^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i e_i + A_{i+1} e_{i+1}}{2} r_x - \frac{A_i r_i + A_{i+1} r_{i+1}}{2} e_x \right) (r_i - r_{i+1}), \quad (17.14,a)$$

unde e_i este excentricitatea centrului de greutate al secțiunii de la raza r_i .

Momentul încovoiător axial

Din figura 17.5, b rezultă că momentul încovoiător infinitezimal la raza r_y este

$$dM_A = \rho \omega^2 A r dr (e_r - e_y),$$

unde e_r și e_y sunt distanțele de la punctele G și G_y la o linie de referință radială, iar G_y este centrul de greutate al secțiunii de la raza r_y .

Momentul încovoiător axial total este

$$M_T = \rho \omega^2 \int_{r_y}^{r_l} A r (e_r - r_y) dr. \quad (17.15)$$

sau, în forma adecvată calculului numeric

$$M_A = \rho \omega^2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{(A r e)_i + (A r e)_{i+1}}{2} - \frac{(A r)_i + (A r)_{i+1}}{2} e_y \right] (r_i - r_{i+1}). \quad (17.15,a)$$

Din figura 17.4 rezultă componentele momentului încovoiător în lungul axelor centrale principale de inerție ale secțiunii

$$\begin{aligned} M_{max} &= M_T \sin \theta + M_A \cos \theta, \\ M_{min} &= M_T \cos \theta - M_A \sin \theta. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Tensiunea normală maximă pe extradados este

$$\sigma_{ex} = \frac{M_{max}}{I_{max}} e + \frac{M_{min}}{I_{min}} f. \quad (17.17)$$

Tensiunea maximă pe muchia de intrare este

$$\sigma_{mi} = \frac{M_{max}}{I_{max}} c + \frac{M_{min}}{I_{min}} b. \quad (17.18)$$

Tensiunea maximă pe muchia de ieșire este

$$\sigma_{me} = \frac{M_{max}}{I_{max}} a + \frac{M_{min}}{I_{min}} d. \quad (17.19)$$

În relațiile (17.17)-(17.18) I_{max} și I_{min} sunt momentele de inerție principale ale secțiunii transversale a paletei în care se face calculul.

17.3 Solicitări prin forțe armonice

Forțe cu variație periodică în timp sunt produse de dezechilibrul și dezaxarea rotoarelor mașinilor, de acțiunea mecanismelor bielă-manivelă asupra arborilor cotiți și carcaselor, de pulsațiile fluidelor în conducte sau de alte fenomene periodice care apar în timpul funcționării mașinilor.

17.3.1 Sistem în vibrații libere

Se consideră sistemul "masă - arc lamelar" din figura 17.6. Elementul elastic este o bară în consolă, de lungime ℓ și modul de rigiditate la încovoiere $EI = \text{const}$. Se neglijează greutatea proprie a barei.

Inițial bara este orizontală (fig. 17.6, a). După atașarea masei $m = G/g$, capătul barei se deplasează pe verticală cu δ_{st} (fig. 17.6, b). În poziția de echilibru static, masa m este în echilibru sub acțiunea greutății mg și a forței elastice $k \delta_{st}$ (fig. 17.6, c)

$$k \delta_{st} = m g . \quad (17.20)$$

unde $k = 3EI/\ell^3$.

Scos din poziția de echilibru static și lăsat liber, sistemul vibrează. Alegând originea coordonatei w , care definește mișcarea masei m , în poziția de echilibru static (fig. 17.6, d), în ecuația mișcării vor interveni numai forțe datorite deplasării față de această poziție. Izolând masa (fig. 17.6, e) și considerând toate mărimile vectoriale pozitive în jos, atunci la momentul t , când masa m are elongația $w(t)$, asupra acesteia acționează numai forța elastică $(-k w)$.

Legea a doua a dinamicii se scrie $m \ddot{w} = -k w$ sau

$$m \ddot{w} + k w = 0 , \quad (17.21)$$

relație care reprezintă ecuația diferențială a vibrațiilor libere ale masei sistemului din figura 17.6.

Soluția generală a ecuației (17.21) este

$$w(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + d_0 \cos \omega_n t , \quad (17.22)$$

unde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ este pulsația proprie a sistemului, iar $d_0 = w(0)$ și $v_0 = \frac{dw}{dt}(0)$

sunt deplasarea și viteza la momentul $t = 0$.

Expresia (17.22) se mai poate scrie și sub forma

$$w(t) = \bar{w} \sin(\omega_n t + \theta), \quad (17.23)$$

unde

$$\bar{w} = \sqrt{d_0^2 + (v_0^2 / \omega_n^2)}, \quad \theta = \arctg(d_0 \omega_n / v_0). \quad (17.24)$$

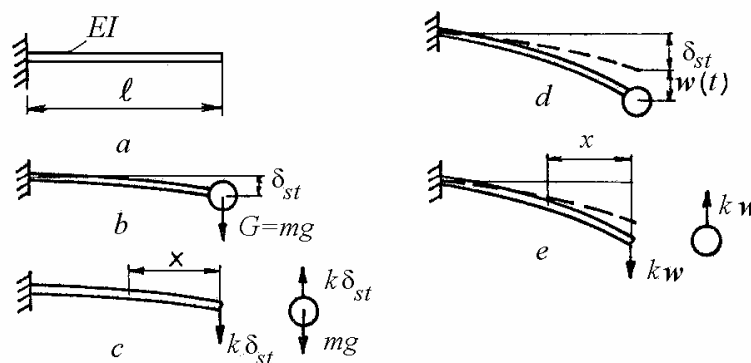


Fig. 17.6

În poziția de echilibru static (fig. 17.6, c), în secțiunea x apare o tensiune

$$\sigma'_{st} = \frac{M_{st}}{W_y} = \frac{mg x}{W_y} = k \delta_{st} \frac{x}{W_y}$$

produsă de forța $k \delta_{st}$ aplicată la capătul barei.

În timpul vibrațiilor libere (fig. 17.6, e), asupra barei acționează forța suplimentară $k w = k \bar{w} \sin(\omega_n t + \theta)$ care produce o tensiune dinamică de amplitudine

$$\sigma_d = \frac{M_d}{W_y} = \frac{k \bar{w} x}{W_y}.$$

Dacă se notează cu ψ raportul între amplitudinea forței dinamice (forța de inerție a masei m) și forța statică

$$\psi = \frac{k \bar{w}}{k \delta_{st}} = \frac{\bar{w}}{\delta_{st}} = \frac{\bar{w}}{g} \omega_n^2, \quad (17.25)$$

atunci se poate scrie

$$\sigma_d = \psi \sigma'_{st}, \quad (17.26)$$

unde coeficientul dinamic ψ depinde de pulsația mișcării.

17.3.2 Sistem în vibrații forțate neamortizate

Fie sistemul din figura 17.7, *a* acționat de forța armonică $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Ecuția diferențială a mișcării este

$$m \ddot{w} + k w = F_0 \sin \omega t, \quad (17.27)$$

În regim staționar, soluția ecuației (17.27) se alege de aceeași formă cu excitația $w(t) = \hat{w} \sin \omega t$. Se obține

$$\hat{w} = \frac{w_{st}}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}, \quad (17.28)$$

unde $w_{st} = F_0 / k$ este deformația produsă de forța F_0 aplicată static iar ω_n este pulsația proprie a sistemului.

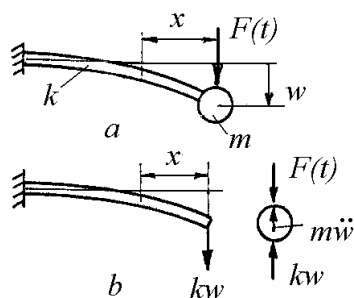


Fig. 17.7

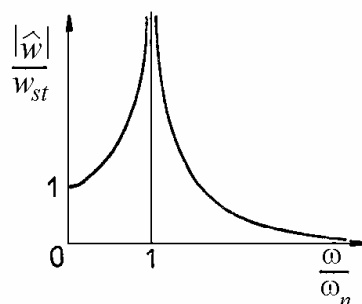


Fig. 17.8

Dacă s-ar aplica static o forță F_0 , atunci nu ar interveni forța de inerție a masei și tensiunea maximă în secțiunea x (fig. 17.6, *b*) ar fi

$$\sigma_{st} = \frac{F_0 x}{W_y}. \quad (17.29)$$

În regim dinamic, asupra barei acționează forța kw (fig. 17.7, *b*), de amplitudine

$$k |\hat{w}| = \frac{F_0}{|1 - \omega^2 / \omega_n^2|}.$$

În secțiunea x aceasta produce tensiuni maxime de amplitudine

$$\sigma_d = \frac{|kw|x}{W_y} = \frac{|kw|}{F_0} \sigma_{st} = \frac{|w|}{w_{st}} \sigma_{st} = \psi \sigma_{st}, \quad (17.30)$$

unde coeficientul dinamic

$$\psi = \frac{1}{\left|1 - \omega^2/\omega_n^2\right|} \quad (17.31)$$

este egal cu factorul de amplificare al vibrațiilor.

La rezonanță, când $\omega \rightarrow \omega_n$, coeficientul dinamic crește nelimitat (fig. 17.8) deoarece s-a neglijat amortizarea din sistem. La sisteme reale tensiunile dinamice au valori foarte mari. În probleme practice, de obicei pulsația ω este impusă de funcționarea mașinii, astfel că pentru evitarea rezonanței trebuie aleasă corespunzător pulsația proprie ω_n , deci valorile parametrilor k și m .

De notat că tensiunile statice maxime din secțiunea x , datorite masei m , se calculează cu relația

$$\sigma'_{st} = \frac{m g x}{W_y}.$$

Acestea nu trebuie confundate cu tensiunile produse de o forță F_0 aplicată static.

Se poate face un calcul la oboseală (v. Cap.18) considerând tensiunea medie egală cu σ'_{st} și amplitudinea tensiunii egală cu σ_d .

Exemplul 17.2

Sistemul din figura 17.9 este format din o greutate $P = 30$ N, atașată la mijlocul unei grinzi din oțel, cu lungimea $\ell = 0,25$ m și diametrul $d = 8$ mm. Să se calculeze tensiunea maximă produsă la mijlocul barei de o forță $F(t) = F_0 \sin \omega t$, unde $F_0 = 50$ N și $\omega = 100$ rad/s. Se dă modulul de elasticitate $E = 210$ GPa.

Rezolvare

Se calculează modulul de rezistență axial $W_y = 50$ mm³ și momentul de inerție axial $I_y = 200$ mm⁴.

Rigiditatea barei în punctul de atașare a masei este

$$k = \frac{48 E I_y}{\ell^3} = \frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 200}{250^3} = 129 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Pulsația proprie a sistemului are valoarea

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k g}{F}} = \sqrt{\frac{129 \cdot 9810}{30}} = 205,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Coeficientul dinamic se calculează cu formula (17.31)

$$\psi = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2} = \frac{1}{1 - 100^2/205,4^2} = 1,31.$$

Tensiunea statică produsă la mijlocul barei de forța F_o are valoarea

$$\sigma_{st} = \frac{F_o \ell}{4W_y} = \frac{50 \cdot 250}{4 \cdot 50} = 62,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Amplitudinea tensiunii dinamice produse de forța $F_o \sin \omega t$ este

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 1,31 \cdot 62,5 = 81,9 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea statică produsă de greutatea P are valoarea

$$\sigma'_{st} = \frac{P \ell}{4W_y} = \frac{30 \cdot 250}{4 \cdot 50} = 37,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

deci tensiunea totală maximă la mijlocul barei este

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma'_{st} = 81,9 + 37,5 = 119,4 \text{ N/mm}^2.$$

17.4 Solicitări prin șoc

Șocurile sunt acțiuni de scurtă durată, de obicei mai mică decât perioada proprie fundamentală de vibrație a sistemului solicitat. Încărcările prin șoc apar la ciocnirea corpurilor, manevrări bruște, aplicarea bruscă a sarcinilor, la ciocane de forjă sau pneumatice, la structuri solicitate prin unde de șoc sau explozii.

17.4.1 Răspunsul la o forță variabilă în timp

Se consideră un sistem neamortizat cu un grad de libertate (fig. 17.9), asupra căruia acționează o forță $F(t)$ având o variație în timp ca în figura 17.10.

Pe durata unui interval de timp $d\tau$, forța $F(\tau)$ poate fi considerată constantă. Aria suprafeței hașurate din figura 17.10 reprezintă un impuls infinitezimal, care produce variația de viteză

$$d\dot{w} = \frac{F(\tau) \cdot d\tau}{m}. \quad (17.32)$$

Deplasarea elementară dw a masei m , datorită acestui impuls, este

$$dw = \frac{F(\tau) \cdot d\tau}{m} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega(t - \tau) \quad \text{pentru } t \geq \tau,$$

cea ce se deduce direct din relația (17.22), considerând că masa are deplasare nulă $d_0 = 0$ și viteză inițială $v_0 = d\dot{w}$ la momentul $t = \tau$.

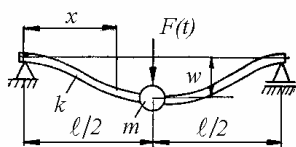


Fig. 17.9

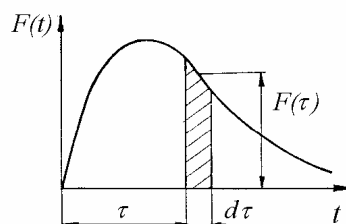


Fig. 17.10

Însumând efectele tuturor impulsurilor înfinitesimale între momentele $\tau = 0$ și $\tau = t$, se obține expresia deplasării masei m sub acțiunea forței $F(t)$, sub forma integralei lui Duhamel

$$w(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (17.33)$$

17.4.2 Forță constantă aplicată brusc

Se consideră sistemul din figura (17.9), solicitat de o forță concentrată constantă $F(t) = F$, aplicată sub formă de impuls treaptă (fig. 17.11, a).

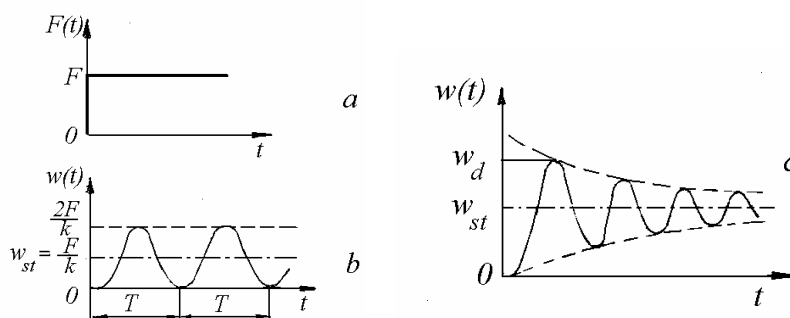


Fig. 17.11

Ecuția diferențială a mișcării este

$$m \ddot{w} + k w = F,$$

având soluția generală

$$w(t) = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + \frac{F}{k}, \quad (17.34)$$

unde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ este pulsația proprie a sistemului. Se presupune că la $t=0$, $w_0 = \dot{w}_0 = 0$. Înlocuind aceste condiții inițiale în relația (17.34), rezultă constantele de integrare $C_1 = 0$ și $C_2 = -F/k$, deci expresia deplasării masei m este

$$w(t) = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega_n t), \quad (17.35)$$

fiind reprezentată grafic în figura 17.11, *b*.

Dacă forța F ar fi aplicată static, ar produce o deplasare

$$w_{st} = \frac{F}{k}. \quad (17.36)$$

Raportul între săgeata dinamică și cea statică este *factorul de amplificare*

$$\Gamma(t) = \frac{w(t)}{w_{st}} = 1 - \cos \omega_n t. \quad (17.37)$$

Valoarea maximă a factorului de amplificare se numește *coeficient dinamic*

$$\psi = \Gamma_{max} = 2. \quad (17.38)$$

Într-o secțiune oarecare x (fig. 17.6), tensiunea dinamică maximă este

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st}, \quad (17.39)$$

unde σ_{st} este valoarea corespunzătoare aplicării statice a forței F .

Forța F face ca sistemul să vibreze în jurul poziției de echilibru static, definită de w_{st} , după cum se arată în figura 17.11, *b*.

Dacă se ține seama și de amortizarea inerentă din sistem, variația în timp a deplasării masei m ale alura din figura 17.11, *c*, coeficientul dinamic ψ determinându-se ca raport între deplasarea maximă w_d și deplasarea statică w_{st} , corespunzătoare poziției la care masa m ajunge după amortizarea completă a vibrațiilor

$$\psi = \frac{w_d}{w_{st}}.$$

Datorită relațiilor liniare între forțe și deformații, pe de o parte, și între forțe și tensiuni, pe de altă parte, o vibrogramă similară celei din figura 17.11, *c* se

obține la măsurarea tensiunilor din bară, permițând determinarea experimentală a coeficienților dinamici cu relația (17.39).

17.4.3 Impuls triunghiular descrescător

Se consideră sistemul din figura 17.9, sollicitat de o forță $F(t)$ cu variație în timp ca în figura 17.12, exprimată analitic sub forma

$$F(t) = F \left(1 - \frac{\tau}{t_d} \right), \quad (17.40)$$

unde t_d este durata impulsului.

Cu condițiile $w_0 = \dot{w}_0 = 0$ la $t = 0$, problema se rezolvă utilizând soluția generală (17.33).

a) *Faza I.* Pentru $\tau \leq t_d$, deci pe durata cât acționează forța, înlocuind expresia (17.40) în (17.33), deci pentru condiții inițiale nule, după efectuarea calculelor rezultă

$$w(t) = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega_n t) + \frac{F t}{k t_d} \left(\frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t} - 1 \right). \quad (17.41)$$

Factorul de amplificare dinamică este

$$\Gamma(t) = \frac{w(t)}{w_{st}} = \frac{w(t)}{\frac{F}{k}} = 1 - \cos \omega_n t + \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_d} - \frac{t}{t_d}. \quad (17.42)$$

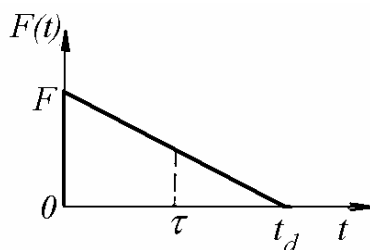


Fig. 17.12

b) *Faza II.* Pentru $\tau \geq t_d$, deci după încetarea acțiunii forței, condițiile inițiale ale mișcării se determină înlocuind $t = t_d$ în expresia (17.41) și în expresia derivatei acesteia în raport cu timpul. Se obține

$$w(t_d) = w_0 = \frac{F}{k} \left(\frac{\sin \omega_n t_d}{\omega_n t_d} - \cos \omega_n t_d \right), \quad (17.43)$$

$$\dot{w}(t_d) = \dot{w}_0 = \frac{F}{k} \left(\omega_n \cdot \sin \omega_n t_d + \frac{\cos \omega_n t_d}{t_d} - \frac{1}{t_d} \right). \quad (17.44)$$

Substituind expresiile (17.43) și (17.44) în ecuația mișcării libere neamortizate (17.22) și înlocuind $t = t - t_d$, se obține

$$w(t) = \frac{F}{k \omega_n t_d} [\sin \omega_n t_d - \sin \omega_n (t - t_d)] - \frac{F}{k} \cos \omega_n t, \quad (17.45)$$

deci factorul de amplificare este

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\omega_n t_d} [\sin \omega_n t_d - \sin \omega_n (t - t_d)] - \cos \omega_n t, \quad (17.46)$$

Anulând derivata în raport cu timpul a funcției $\Gamma(t)$, se obține timpul t_m , măsurat din momentul aplicării forței, după care apare răspunsul maxim. Înlocuind această valoare în expresia factorului de amplificare, se obține coeficientul dinamic

$$\psi = \Gamma_{max} = \Gamma(t_m). \quad (17.47)$$

Pentru impulsuri de foarte scurtă durată ($t_d/T < 0,4$), răspunsul maxim apare în faza răspunsului liber (faza II). Altfel, el apare pe durata aplicării impulsului (faza I).

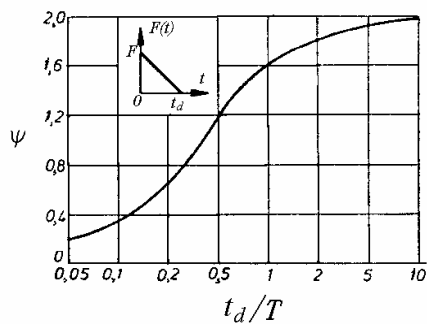


Fig. 17.13

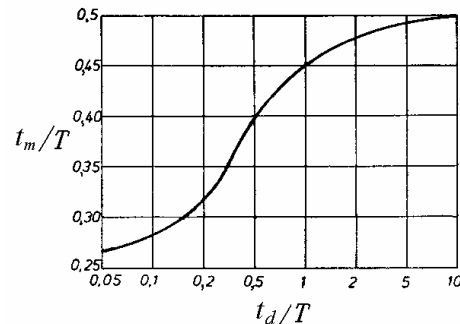


Fig. 17.14

În figura 17.13 se prezintă variația coeficientului dinamic ψ în funcție de raportul t_d/T , unde $T = 2\pi/\omega_n$ este perioada proprie de vibrație a sistemului. În figura 17.14 se arată variația raportului t_m/T în funcție de t_d/T .

Aceste diagrame sunt deosebit de utile în proiectare, deoarece este suficient să se cunoască perioada proprie de vibrație T și durata impulsului t_d pentru a se calcula timpul de răspuns maxim t_m și factorul dinamic ψ . Tensiunea dinamică maximă se calculează apoi cu relația (17.39).

Exemplul 17.3

Să se calculeze tensiunea maximă produsă în bara din figura 17.9 de o forță $F(t)$ având variația în timp ca în figura 17.12, unde $F_o = 50 \text{ N}$ și $t_d = 0,01 \text{ s}$. Se dau $E = 210 \text{ GPa}$, $\ell = 0,25 \text{ m}$, $d = 8 \text{ mm}$ și $P = 30 \text{ N}$.

Rezolvare

Modulul de rezistență axial al secțiunii barei este $W_y = 50 \text{ mm}^3$.

Pulsăția proprie a sistemului a fost calculată la Exemplul 17.1 fiind $\omega_n = 205,4 \text{ rad/s}$.

Perioada proprie de vibrație este

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{205,4} = 0,03 \text{ s}.$$

Se calculează raportul adimensional

$$\frac{t_d}{T} = \frac{0,01}{0,03} = 0,333$$

pentru care, din figurile 17.13 și 17.14, se obțin

$$\psi = 0,95 \quad \text{și} \quad t_m/T = 0,365.$$

Tensiunea statică produsă la mijlocul barei de forța $F_o = 50 \text{ N}$ este

$$\sigma_{st} = \frac{F_o \ell}{4W_y} = \frac{50 \cdot 250}{4 \cdot 50} = 62,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Tensiunea dinamică în aceeași secțiune are valoarea

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 0,95 \cdot 62,5 = 59,4 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea statică produsă de greutatea P este

$$\sigma'_{st} = 37,5 \text{ N/mm}^2.$$

Însumând efectele se obține tensiunea totală maximă la mijlocul barei

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma'_{st} = 59,4 + 37,5 = 96,9 \text{ N/mm}^2.$$

17.4.4 Impuls dreptunghiular

În figurile 17.15 și 17.16 se dau diagramele de calcul pentru un impuls dreptunghiular, de durată t_d .

Dacă $t_d \geq T/2$, răspunsul maxim apare totdeauna în faza I ($0 \leq t \leq t_d$) iar coeficientul dinamic $\psi = 2$. Pentru impulsuri de durată mai scurtă, răspunsul maxim apare în faza II. Pentru $t_d \leq T/2$ se obține $\psi = 2 \sin(\pi t_d/T)$.

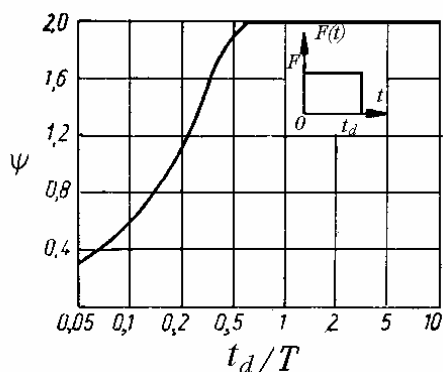


Fig. 17.15

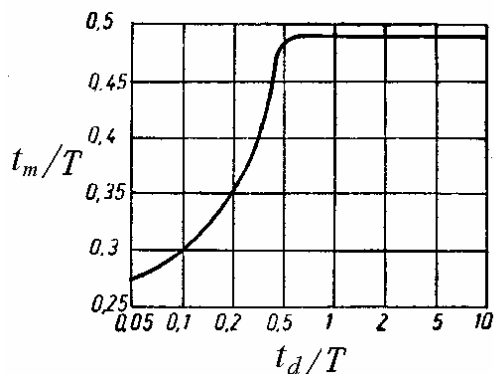


Fig. 17.16

Exemplul 17.4

La sistemul din figura 17.7, a se dau $G = 40 \text{ N}$ și $\ell = 0,2 \text{ m}$. Bara este din oțel cu $E = 210 \text{ GPa}$ și secțiunea pătrată, cu latura $a = 10 \text{ mm}$. Să se calculeze tensiunea maximă în secțiunea din încastrare dacă în capătul liber al barei acționează: a) o forță $F(t)$ sub formă de impuls dreptunghiular cu $F = 20 \text{ N}$ și $t_d = 0,02 \text{ s}$; b) o forță armonică cu amplitudinea $F_o = 20 \text{ N}$ și pulsația $\omega = 80 \text{ rad/s}$.

Rezolvare

Pentru secțiunea pătrată, $W_y = \frac{10^3}{6} = 167 \text{ mm}^3$ și $I_y = \frac{10^4}{12} = 833 \text{ mm}^4$.

Rigiditatea barei în punctul de aplicare a forței este

$$k = \frac{3EI_y}{\ell^3} = \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 833}{200^3} = 65,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Pulsația proprie a sistemului este

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k g}{G}} = \sqrt{\frac{65,6 \cdot 9810}{40}} = 126,84 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

iar perioada proprie de vibrație este $T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{126,84} = 0,0495 \text{ s}$.

a) Dacă asupra barei acționează impulsul dreptunghiular, se calculează raportul adimensional

$$\frac{t_d}{T} = \frac{0,02}{0,0495} = 0,404$$

pentru care, din figurile 17.15 și 17.16 se obțin

$$\psi = 1,8 \quad \text{și} \quad t_m/T = 0,45.$$

Tensiunea statică produsă în încastrare de forța $F = 20 \text{ N}$ este

$$\sigma_{st} = \frac{F \ell}{W_y} = \frac{20 \cdot 200}{167} = 23,95 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

iar tensiunea dinamică

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 1,8 \cdot 23,95 = 43,1 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea statică produsă de greutatea G este $\sigma'_{st} = 47,9 \text{ N/mm}^2$, astfel că tensiunea totală maximă în încastrare este

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma'_{st} = 43,1 + 47,9 = 91 \text{ N/mm}^2.$$

b) Dacă asupra barei acționează forța armonică, coeficientul dinamic (17.31) va fi

$$\psi = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2} = \frac{1}{1 - 80^2/126,84^2} = 1,66.$$

Tensiunea statică produsă de forța F_o în secțiunea din încastrare este

$$\sigma_{st} = \frac{F_o \ell}{W_y} = \frac{20 \cdot 200}{167} = 23,95 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Amplitudinea tensiunii dinamice produse de forța $F_o \sin \omega t$ în încastrare este

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 1,66 \cdot 23,95 = 39,8 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea statică produsă de greutatea G în încastrare a fost calculată la punctul anterior: $\sigma'_{st} = 47,9 \text{ N/mm}^2$.

Tensiunea totală maximă în secțiunea din încastrare este

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma'_{st} = 39,8 + 47,9 = 87,6 \text{ N/mm}^2 .$$

17.4.5 Calculul aproximativ la solicitări prin șoc

Fie corpul de greutate F care lovește bara din figura 17.17, *a* producând în punctul de contact o deplasare dinamică δ_d (fig. 17.17, *b*). Pentru calculul tensiunilor dinamice din bară, se fac următoarele ipoteze:

- Se neglijează masa corpului lovit; prin aceasta, la ciocnire nu se pierde energie.
- Se consideră că în toate punctele corpului lovit deformațiile maxime au loc în același timp (se neglijează propagarea de unde elastice și amortizarea).
- Corpul lovit nu are mișcări de ansamblu de corp rigid.
- Local, în zona ciocnirii, nu apar deformații plastice.
- După ciocnire, greutatea F rămâne solidară cu bara, până la atingerea deplasării maxime.
- Corpul care lovește este rigid.

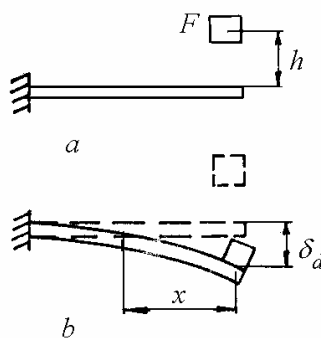


Fig. 17.17

Dacă forța F ar acționa static, ar produce săgeata $\delta_{st} = F/k$, iar în corpul lovit s-ar înmagazina o energie potențială de deformație

$$U = \frac{1}{2} F \delta_{st} . \quad (17.48)$$

Acțiunea dinamică a forței F este echivalentă cu acțiunea statică a forței

$$F_d = \psi F , \quad (17.49)$$

unde ψ este *multiplicatorul de impact*. Aceasta produce săgeata

$$\delta_d = \psi \delta_{st}, \quad (17.50)$$

astfel că energia potențială de deformare este

$$U_d = \frac{1}{2} F_d \delta_d. \quad (17.51)$$

Ținând cont de relațiile (17.49) și (17.50), expresia (17.51) devine

$$U_d = \frac{1}{2} \psi F \psi \delta_{st} = \frac{1}{2} \psi^2 F \delta_{st} = \psi^2 U. \quad (17.51, a)$$

Se aplică teorema energiei cinetice pentru faza de deformare a corpului lovit

$$E_2 - E_1 = L. \quad (17.52)$$

Energia finală E_2 este nulă, sistemul având viteză nulă în punctul de elongație maximă. Energia inițială E_1 este egală cu energia cinetică E_0 avută de corpul care produce șocul în momentul în care vine în contact cu corpul lovit.

Lucrul mecanic L efectuat în timpul deformării, imediat după lovire, are două componente: lucrul forței exterioare F , care parcurge cu întreaga intensitate deplasarea δ_d , egal cu $F \delta_d = F \psi \delta_{st} = 2\psi U$ și lucrul forțelor elastice interioare, egal și de semn contrar cu energia potențială de deformare, deci cu $-U_d = -\psi^2 U$. Rezultă că relația (17.52) se scrie

$$0 - E_0 = 2\psi U - \psi^2 U$$

sau

$$\psi^2 - 2\psi - \frac{E_0}{U} = 0,$$

având ca soluție acceptabilă fizic

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_0}{U}}. \quad (17.53)$$

Rezultă că, la limită, atunci când $E_0 = 0$, multiplicatorul de impact $\psi = 2$.

Căderea liberă. Când greutatea F cade liber de la înălțimea h pe un corp deformabil (fig. 17.17, a)

$$E_0 = F h, \quad U = \frac{1}{2} F \delta_{st},$$

iar relația (17.53) devine

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \quad (17.54)$$

Mișcarea uniformă rectilie. Când greutatea F se deplasează cu viteza constantă v (datorită unor forțe de frecare sau frânare)

$$E_0 = \frac{G}{g} \frac{v^2}{2}, \quad U = \frac{1}{2} F \delta_{st}$$

iar relația (17.53) devine

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \delta_{st}}} \quad (17.55)$$

În ambele cazuri, în formula multiplicatorului de impact intervine săgeata statică a corpului lovit δ_{st} . Cu cât corpul lovit este mai elastic (deci δ_{st} mai mare), cu atât ψ este mai mic, deci efectul aplicării dinamice a sarcinii este redus. Un corp solid rezistă cu atât mai bine la șoc cu cât este mai deformabil.

Într-o secțiune oarecare x a barei din figura 17.17, b , tensiunea dinamică este

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st}, \quad (17.56)$$

unde

$$\sigma_{st} = \frac{F x}{W_y}$$

Calculule efectuate pe baza relației (17.53) sunt acoperitoare, rezultând pentru ψ valori mai mari decât cele obținute când se ține seama de masa corpului lovit.

Exemplul 17.5

Un cablu din oțel, cu secțiunea $A = 800 \text{ mm}^2$ și $E = 210 \text{ GPa}$, de care este atârnată o greutate $F = 20 \text{ kN}$, se desfășoară de pe o tobă cu viteza constantă $v = 1 \text{ m/s}$ (fig. 17.18). După ce s-a desfășurat o lungime $\ell = 21 \text{ m}$ din cablu, toba se blochează brusc. Se cere să se calculeze tensiunea care se produce în cablu în urma acestui șoc.

Rezolvare

Alungirea statică a cablului este

$$\delta_{st} = \frac{F\ell}{EA} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 21 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 800} = 2,5 \text{ mm} .$$

Multiplicatorul de impact (17.55) este

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{10^6}{9,81 \cdot 10^3 \cdot 2,5}} = 7,47 .$$

Tensiunea statică în cablu este

$$\sigma_{st} = \frac{F}{A} = \frac{2 \cdot 10^4}{800} = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} .$$

Tensiunea dinamică are valoarea

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 7,47 \cdot 25 = 187 \text{ N/mm}^2 .$$

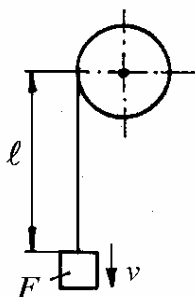


Fig. 17.18

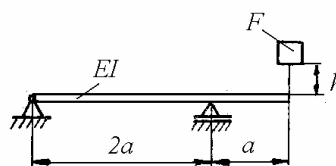


Fig. 17.19

Exemplul 17.6

Bara din figura 17.19 este din oțel cu $E = 210 \text{ GPa}$, din profil I30 cu $I_y = 9,8 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$, $W_y = 6,53 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$ și $a = 2 \text{ m}$. Pe capătul liber al barei cade greutatea $F = 2,5 \text{ kN}$ de la înălțimea $h = 75 \text{ mm}$. Se cere tensiunea maximă din bară.

Rezolvare

Săgeata statică în capătul barei este

$$\delta_{st} = \frac{Fa^3}{EI_y} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 2^3 \cdot 10^9}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 9,8 \cdot 10^7} = 0,972 \text{ mm} .$$

Multiplicatorul de impact (17.54) este

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 75}{0,972}} = 13,46.$$

Tensiunea statică maximă, în secțiunea de pe reazemul din dreapta, este

$$\sigma_{st} = \frac{F a}{W_y} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 2000}{6,53 \cdot 10^5} = 7,65 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Tensiunea dinamică în aceeași secțiune are valoarea

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 13,46 \cdot 7,65 = 103 \text{ N/mm}^2.$$

17.4.6 Solicitarea la răsucire prin șoc

Fie arborele elastic, de masă neglijabilă, din figura 17.20, pe care este montat un disc rigid, de greutate Q . Sistemul se rotește cu viteza unghiulară ω și este blocat brusc în secțiunea din dreapta.

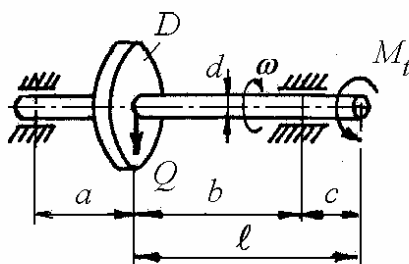


Fig. 17.20

Energia cinetică a discului $\frac{1}{2} J \omega^2$, unde momentul de inerție masic al discului $J = \frac{Q D^2}{8g}$, se transformă în energie potențială de deformație a porțiunii de arbore solicitate la răsucire (6.19)

$$U = \frac{1}{2} M_t \frac{M_t \ell}{G I_p} = \frac{16 M_t^2 \ell}{\pi G d^4}.$$

Egalând energia cinetică a discului cu energia de deformație a arborelui rezultă momentul de răsucire aplicat arborelui pentru imobilizarea secțiunii din capăt

$$M_t = \frac{D d^2 \omega}{16} \sqrt{\frac{\pi Q G}{g \ell}},$$

pe baza căruia se calculează tensiunea tangențială maximă

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \omega \frac{D}{d} \sqrt{\frac{Q G}{\pi g \ell}}. \quad (17.57)$$

Într-un calcul mai exact se consideră și momentul de inerție masic al arborelui.

18.

OBOSEALA METALELOR

Oboseala metalelor este un proces care produce ruperea prematură sau deteriorarea unei piese supuse la solicitări repetate.

Rezistența materialelor la solicitări variabile în timp este mai mică decât rezistența la solicitări statice. Fenomenul a fost observat la podurile de cale ferată (W.J.M. Rankine, 1843) și la osiile materialului rulant (A. Wöhler, 1850) care, deși dimensionate corespunzător din punct de vedere static (astfel încât tensiunile maxime să fie mult sub rezistența la rupere a materialului), s-au rupt după un număr de ore de funcționare în condiții de solicitări ciclice.

Experiențele în laborator, cu epruvete solicitate la încovoiere rotativă (A. Wöhler, 1856), au arătat că o piesă, care poate rezista timp nelimitat la o solicitare statică sub o anumită tensiune, se rupe după un număr de cicluri de solicitare, deși tensiunea maximă are aceeași valoare. Fenomenului de micșorare a capacității de rezistență sub efectul solicitărilor variabile i s-a dat numele de *oboseală* a materialului (J.V. Poncelet, 1839).

Oboseala este modul predominant de pierdere a integrității structurale, important atât ca frecvență de apariție cât și ca factor decisiv în determinarea tensiunilor de lucru în piese solicitate la sarcini fluctuante. Cu toate progresele recente în studiul propagării fisurilor, predicția duratei de viață la oboseală se face cu erori mari, chiar atunci când se dispune de date certe asupra proprietăților materialelor. Cauzele principale sunt variabilitatea proceselor de fabricație, cunoașterea aproximativă a istoriei de solicitare și insuficiența cunoștințelor actuale despre oboseală și rupere.

În condițiile în care o estimare absolută a durabilității la oboseală este incertă, metodele de calcul la oboseală se folosesc pentru estimări relative, la comparația mai multor materiale pentru o anumită piesă sau structură, sau comparația mai multor soluții constructive, utilizând același material. Se face fie calculul unui *coeficient de siguranță la durabilitate nelimitată*, ce trebuie comparat cu valori rezultate din practică pentru diferite tipuri de piese, fie un calcul al numărului de cicluri de solicitare până la pierderea integrității structurale, în cazul durabilității limitate, combinat cu un criteriu de acumulare a deteriorărilor.

Înțelegerea mecanismelor fizice ale deteriorărilor prin oboseală, în deosebi comportarea fisurilor scurte, permite studiul factorilor care influențează limita de oboseală și durata de viață la oboseală: mediul coroziv, fretajul, tratamentele superficiale, granulația materialului, nivelul tensiunii medii, stările de tensiune multiaxiale, încărcările cu sarcini aleatoare, precum și acțiunea lor combinată. În acest fel, se pot elabora metode analitice care să cuantifice deteriorarea prin oboseală pentru a proiecta componente și structuri care să reziste la solicitări dinamice repetate.

18.1 Deteriorarea prin oboseală

Procesul de oboseală poate fi împărțit în două faze distincte, *inițierea* și *propagarea* fisurilor. În faza de inițiere au loc modificări în comportarea materialului constând din ecruisarea sau înmuierea prin deformare ciclică, localizarea deformațiilor plastice și formarea de discontinuități, urmată de coalescența discontinuităților și apariția microfisurilor. Faza a doua este descrisă de teoriile macroscopice de propagare din Mecanica ruperii.

Ruperea prin oboseală începe prin o fisură care se propagă, micșorând treptat secțiunea piesei. Examinarea secțiunii de rupere permite deosebirea a două zone: una netedă, chiar lustruită, datorită frecării fețelor de rupere adiacente în timpul propagării fisurii și una mată, grăunțoasă, acolo unde are loc ruperea finală bruscă. În general, în zona lucioasă se poate repera poziția fisurii inițiale și se observă unele striuri și linii de oprire, care indică modul de propagare al fisurii datorită solicitării intermitente a piesei (fig. 18.1).

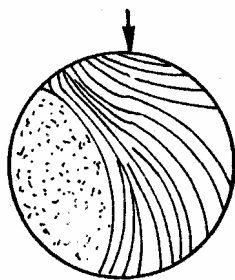


Fig. 18.1

Dacă zona lucioasă ocupă o mică parte din suprafața secțiunii, atunci ruperea s-a produs datorită unei solicitări cu tensiuni mari. În caz contrar, când zona mată este mai mică decât cea lucioasă, ruperea s-a produs la tensiuni mici.

Mecanismele de rupere sunt diferite. Există ruperi fragile și ruperi ductile, ruperi prin clivaj, ruperi intergranulare sau transgranulare, după cum rețeaua cristalină este cubică cu fețe centrate sau volum centrat, sau hexagonală.

Conform definiției din standardul *ASTM E 1150-87*, *oboseala* este "procesul de modificare structurală permanentă, localizată și progresivă, care apare într-un material supus unor condiții ce produc deformații specifice și tensiuni fluctuante în unul sau mai multe puncte, și care pot culmina în fisuri sau ruperea completă după un număr suficient de fluctuații".

Deteriorarea metalelor prin oboseală parcurge de fapt patru faze (fig.18.2): 1) nucleația; 2) propagarea dependentă de structură a fisurilor scurte; 3) propagarea fisurilor caracterizabilă prin Mecanica Ruperii Elastice Liniare (MREL), prin Mecanica Ruperii Elasto-Plastice (MREP) sau prin Mecanica Ruperii Total Plastice (MRTP) și 4) instabilitatea finală. Fiecare din aceste faze este un proces complicat, putând include la rândul lui mai multe subprocese. Primele două faze au fost mult timp considerate împreună, ca un proces de *inițiere* a macrofisurilor.

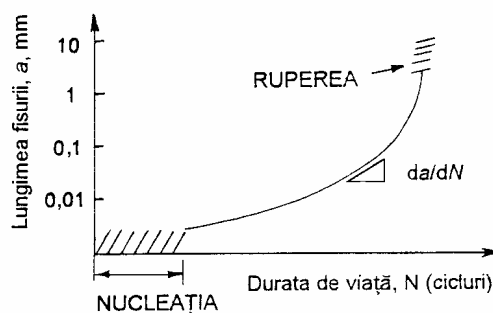


Fig. 18.2

Cercetări recente, în special asupra comportării fisurilor scurte, au dus la un nou mod de abordare a fenomenului de oboseală a materialelor. Fisurile de oboseală sunt studiate în funcție de lungime, formă, orientare, viteza de propagare, coalescența sau interferența lor. Deteriorarea prin oboseală este corelată cu lungimea fisurilor, iar rata de acumulare a deteriorărilor - cu viteza de creștere a fisurilor. Rezistența la oboseală și durata de viață la oboseală nu mai sunt definite de un singur parametru - o *tensiune*, ci și de o *lungime* - distanța la cea mai puternică barieră într-un sistem microstructural (K.J. Miller - 1986).

Faza de inițiere a fisurii nu mai este privită ca o perioadă de nucleație, ci ca o perioadă în care fisura se poate propaga cu viteză descrescătoare până la oprire, înainte de a se dezvolta într-o fisură dominantă. Se admite că defecte de ordinul a 1-2 μm există în orice piesă, deci fisura fatală și zona deformată plastic corespunzătoare sunt generate simultan, încă din primul ciclu de încărcare.

În figura 18.3 se prezintă comparativ creșterea fisurilor lungi și scurte. Structurile sudate conțin defecte de dimensiuni mai mari de 0,5 mm, care se pot propaga la tensiuni de valori relativ mici. O fisură de 1 mm (lungă) poate crește

având la vârf o zonă deformată plastic relativ mică, deci poate fi analizată cu metodele MREL. Dacă forța ciclică aplicată este redusă de la ΔF_3 la ΔF_4 , atunci fisura nu mai crește, deci se atinge pragul de nepropagare a fisurii de oboseală, care reprezintă o *limită de oboseală*.

În cazul unei piese lustruite, cu fisuri superficiale mici, este necesară o forță ciclică ΔF_1 mult mai mare pentru a produce propagarea fisurilor. Zona plastică de la vârful fisurii este relativ mare și trebuie aplicată analiza cu MREP. Dacă forța este redusă de la ΔF_1 la ΔF_2 , se atinge un prag limită care face ca fisura să nu mai crească.

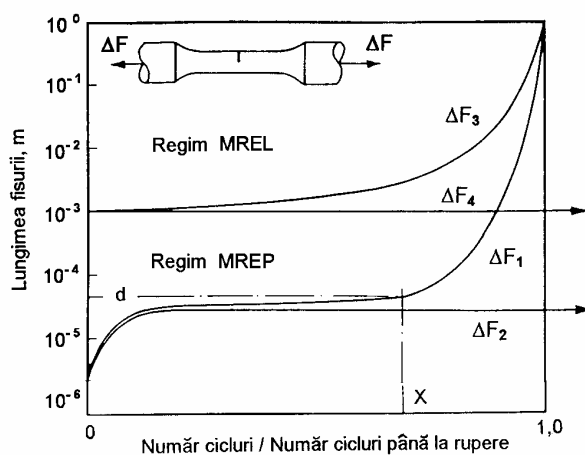


Fig. 18.3

La solicitarea cu ΔF_1 fisura de oboseală poate crește în interiorul unui singur grăunte de diametru d , orientat favorabil, o fracțiune relativ mare X a duratei de viață. Această fază a fost considerată drept "inițierea" fisurii. Ea este determinată de microstructură, deci de incluziuni, de precipitate, de dimensiunea grăunților etc.

18.2 Metodologii de calcul la oboseală

În prezent există trei metodologii diferite de calcul la oboseală, cărora le corespund trei "teorii" distincte de abordare a problemei.

18.2.1 Metoda $\sigma - N$

Metoda bazată pe analiza tensiunilor este utilizată pentru *calculul la durabilitate nelimitată*. Datele experimentale primare se prezintă sub formă de

diagrame de durabilitate, în coordonate "tensiunea maximă - numărul de cicluri până la rupere" (curba lui Wöhler).

Cedarea este definită de separarea totală în două părți a epruvetei încercate. Metoda $\sigma - N$ este aplicabilă pieselor fără fisuri, de forme asemănătoare epruvetelor (încercate la încovoiere rotativă) și având dimensiuni comparabile, fabricate de obicei din oțel sau metale feroase. Există o experiență îndelungată în aplicarea metodei, bazată pe proprietăți specifice pentru care s-au publicat valori determinate experimental în manuale și monografii [17, 19, 32].

18.2.2 Metoda $\varepsilon - N$

Metoda bazată pe analiza deformațiilor specifice este utilizată pentru calculul la *durabilitate limitată*. Ea este aplicabilă pieselor fără fisuri inițiale, solicitate în regim elasto-plastic, fabricate de obicei din oțel forjat sau materiale fără defecte.

Datele experimentale primare se prezintă sub formă de *diagrame la durabilitate mică*, în coordonate "deformație specifică ciclică - număr de cicluri până la cedare" (curba Coffin-Manson), determinate prin încercări de amplitudine constantă, pe epruvete solicitate axial. *Cedarea* este definită în mod diferit, prin apariția unei fisuri vizibile, prin variații bruște ale sarcinii aplicate sau ale rigidității dinamice a epruvetei, care definesc ceea ce s-a considerat a fi perioada de "inițiere" a fisurilor de oboseală.

18.2.3 Metoda tolerării defectelor

Metoda bazată pe analiza propagării fisurilor este aplicabilă pieselor cu fisuri inițiale (de obicei structuri sudate sau nituite). În acest caz, singularitatea tensiunilor la vârful fisurii impune utilizarea unor mărimi din Mecanica ruperii.

Datele experimentale primare se prezintă sub formă de diagrame "viteza de propagare a fisurii - variația factorului de intensitate a tensiunii" trasate în coordonate logaritmice. Metoda permite calculul duratei de extindere a unei fisuri, de la o dimensiune inițială detectabilă prin metode de control nedistructiv, la o dimensiune finală, care conține un factor de siguranță față de valoarea critică. Aplicarea metodei implică inspectarea periodică a structurii și acceptarea existenței fisurilor inițiale, excluzând perioada de "inițiere".

Piese și componentele solicitate la oboseală pot fi împărțite în două categorii: a) piese care nu pot fi lăsate să funcționeze cu fisuri (arbori și piese vitale de mașini) și la care majoritatea duratei de viață este consumată pentru inițierea microfisurilor și care sunt analizate prin metodele $\sigma - N$ și $\varepsilon - N$ pentru determinarea duratei de viață sigure; și b) piese care pot funcționa și după ce au

apărut fisuri, care consumă o parte neglijabilă a duratei de viață pentru a iniția fisuri și care sunt analizate cu metodele Mecanicii ruperii.

Granița între cele două grupe este greu de stabilit. Se apreciază că la piese având factorul teoretic de concentrare a tensiunilor elastice $K_t < 4$, "inițierea" consumă cea mai mare parte din durata de viață și metoda $\varepsilon - N$ este adecvată. Pentru valori mai mari ale lui K_t se pot aplica metodele Mecanicii ruperii liniar elastice, cu controlul deteriorărilor.

18.3 Calculul la oboseală prin analiza tensiunilor

Metodele tradiționale de calcul la oboseală se bazează pe conceptul de *limită de oboseală*, proprietate determinată prin încercări la amplitudine constantă a tensiunilor. Încercările de bază se fac pe epruvete lustruite și fără concentratori de tensiuni, determinând limita de oboseală pentru diferite valori ale coeficientului de asimetrie al ciclurilor. Reluând încercările pe epruvete cu alte dimensiuni, cu alte prelucrări sau tratamente ale suprafeței sau cu diferiți concentratori, se determină influența acestor factori asupra rezistenței la oboseală. Calculul la durabilitate nelimitată se reduce la determinarea unui coeficient de siguranță față de starea de tensiuni care produce ruperea prin oboseală. Dacă solicitările se mențin în domeniul elastic, se poate face și un calcul la durabilitate limitată.

18.3.1 Cicluri de solicitări variabile staționare

Fie arborele din figura 18.4, *a* menținut încovoiat prin înclinarea lagărelor și antrenat în mișcare de rotație cu viteză unghiulară constantă.

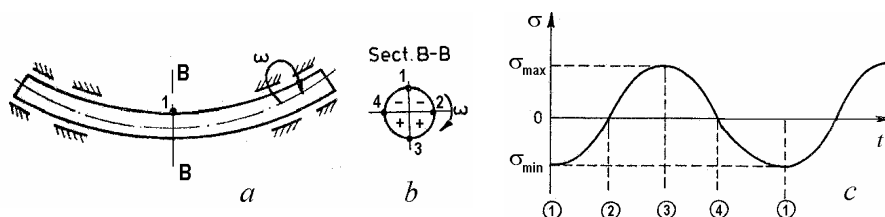


Fig. 18.4

Dacă se urmărește variația tensiunilor într-un punct din secțiunea *B-B* (fig. 18.4, *b*), se observă că, atunci când acesta este în poziția *1*, tensiunea de încovoiere are valoarea minimă $\sigma_{min} < 0$. După un sfert de rotație, în punctul *2*, $\sigma = 0$, pentru ca în punctul *3* să aibă valoarea maximă $\sigma_{max} > 0$. În punctul *4*, pe axa

neutră, $\sigma = 0$, după care se revine în I , la valoarea inițială. Solicitarea se repetă apoi ciclic, la fiecare rotație a arborelui, după cum se arată în figura 18.4, c.

În general, solicitările variabile pot avea o evoluție în timp oarecare, determinată (care poate fi descrisă analitic printr-o funcție de timp) sau aleatoare (impredizibilă). Se vor considera în continuare numai solicitările variabile periodice, de tipul celei reprezentate grafic în figura 18.5.

Sucesiunea valorilor tensiunii, pornind de la o valoare oarecare, până se ajunge din nou la aceeași valoare, în același sens de variație, formează un *ciclu de solicitare variabilă*, de durată T .

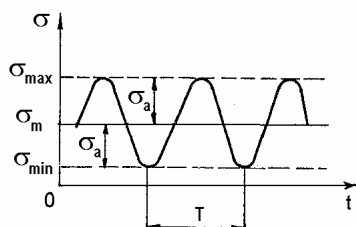


Fig. 18.5

Deoarece, la metale, s-a constatat că frecvența solicitării are o influență neglijabilă asupra rezistenței la oboseală, ciclurile de solicitări variabile se definesc complet prin două mărimi (fig. 18.5): tensiunea maximă σ_{max} și tensiunea minimă σ_{min} , sau tensiunea medie σ_m și amplitudinea tensiunii σ_a . Între acestea se stabilesc relațiile

$$\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2, \quad \sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2, \quad (18.1)$$

sau

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (18.2)$$

La solicitări de amplitudine variabilă se definește *variația tensiunii*

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}. \quad (18.3)$$

Raportul între valorile algebrice ale tensiunii minime și celei maxime este *coeficientul de asimetrie* al ciclului

$$R = \sigma_{min} / \sigma_{max}. \quad (18.4)$$

Rezultă

$$\sigma_a = \sigma_{max} \frac{1-R}{2}, \quad \sigma_m = \sigma_{max} \frac{1+R}{2}. \quad (18.5)$$

Mărimi similare se definesc și atunci când solicitarea este reprezentată prin deformații specifice.

Se disting *cicluri alternante* (fig. 18.6, a), la care σ_{max} și σ_{min} au semne diferite ($R < 0$) și *cicluri oscilante* (fig. 18.6, b), la care σ_{max} și σ_{min} au același semn ($R > 0$).

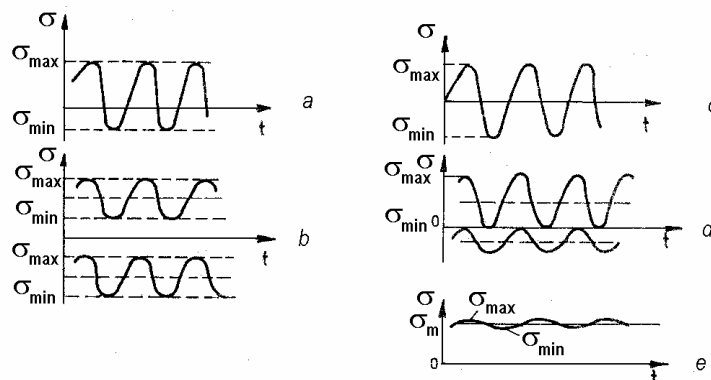


Fig. 18.6

În calcule se utilizează frecvent două cazuri particulare : *ciclurile alternant simetrice* (fig. 18.6, c) la care $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $\sigma_m = 0$ ($R = -1$) și *ciclurile pulsante* (fig. 18.6, d) la care $\sigma_{min} = 0$ sau $\sigma_{max} = 0$ ($R = 0$ sau $R = \pm\infty$). Solicitarea statică poate fi considerată un caz limită pentru care $\sigma_{max} = \sigma_{min}$, $\sigma_a = 0$ ($R = +1$) (fig. 18.6, e).

18.3.2 Limita de oboseală. Curba lui Wöhler

În metodele tradiționale de calcul la oboseală, limita de oboseală s-a numit impropriu *rezistență la oboseală*, urmărind utilizarea unui singur parametru care să definească ruperea, la fel ca la încercări cu sarcini monotone.

Limita de oboseală este cea mai mare valoare a tensiunii maxime σ_{max} a ciclurilor de solicitări variabile cu același coeficient de asimetrie care, acționând timp nelimitat asupra unei piese, nu produce ruperea prin oboseală.

Această caracteristică mecanică se notează σ_R , unde R este coeficientul de asimetrie al ciclului. Astfel, limita de oboseală la cicluri alternant simetrice se notează σ_{-1} sau τ_{-1} , la cicluri pulsante se notează σ_0 sau τ_0 , iar rezistența la rupere statică devine σ_{+1} sau τ_{+1} .

Experiența arată că $\sigma_{-1} < \sigma_0 < \sigma_{+1}$, deci solicitarea prin cicluri alternant simetrice este cea mai severă.

Între valorile limitelor de oboseală și rezistențelor la rupere statice (monotone) ale oțelurilor s-au stabilit următoarele relații empirice:

$$\begin{aligned}\sigma_{-1} &= (0,4 \dots 0,5) \sigma_r, & \sigma_0 &= (1,5 \dots 1,6) \sigma_{-1}, \\ \tau_{-1} &= (0,55 \dots 0,58) \sigma_{-1}, & \tau_0 &= (1,8 \dots 2,0) \tau_{-1}.\end{aligned}$$

Determinarea experimentală a limitei de oboseală a metalelor (conform STAS 5878-77) se face prin încercarea la încovoiere rotativă, pe o mașină de încercat la oboseală (de tip R. Moore), a cărei schemă de principiu este prezentată în figura 18.7 (o variantă). Prin această încercare de obicei se determină σ_{-1} .

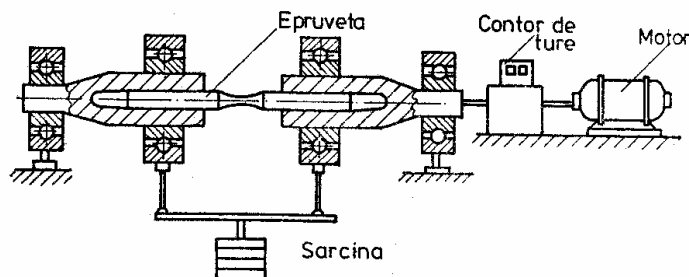


Fig. 18.7

Se încercă cel puțin 6 epruvete. Prima epruvetă se încarcă astfel încât $\sigma_{\max} = \sigma_1 < \sigma_r$. Se constată că ruperea apare după N_1 cicluri de solicitare. Pe o diagramă (fig. 18.8) în coordonate $\sigma_{\max} - N$, se marchează punctul 1, de coordonate σ_1, N_1 .

La oțeluri, a doua epruvetă se încarcă la o tensiune maximă $\sigma_2 = \sigma_1 - (30 \dots 60) \text{ N/mm}^2$ și se rupe după $N_2 > N_1$ cicluri de solicitare. Se marchează punctul 2 pe diagrama din figura 18.8. În continuare, pentru fiecare epruvetă încercată la un ciclu cu același coeficient de asimetrie dar cu tensiunea maximă mai mică, se notează punctul corespunzător pe diagrama $\sigma_{\max} - N$. Intervalele între trepte se aleg apoi mai mici, de $10 \dots 20 \text{ N/mm}^2$. Se constată că pe măsura micșorării lui σ_{\max} , numărul de cicluri până la rupere N crește.

La unele metale, începând cu o anumită epruvetă, deci pentru o valoare dată a lui σ_{\max} , ruperea nu se mai produce, epruveta rezistând practic un număr nelimitat de cicluri de solicitare. Această valoare definește *limita de oboseală* σ_R a materialului (unde R este coeficientul de asimetrie).

Curba trasată prin punctele marcate în diagrama din figura 18.8 se numește *curba lui Wöhler* sau *diagrama durabilității* $\sigma - N$ la amplitudine constantă. În general, aceasta are o asimptotă orizontală, având ca ordonată *limita de oboseală*.

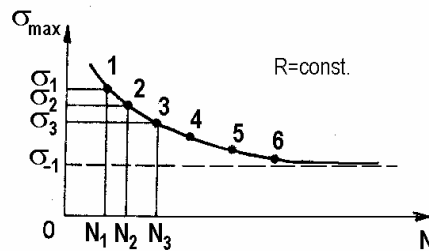


Fig. 18.8

Există însă materiale la care epruvetele nu se rup. În acest caz, încercările se limitează la un număr de cicluri N_D , numit *durabilitate la oboseală* care este $N_D = 2 \cdot 10^6 \dots 2 \cdot 10^7$ pentru oțeluri și $N_D = 2 \cdot 10^7 \dots 2 \cdot 10^8$ pentru aliaje ușoare.

Curba este utilă și pentru determinarea *durabilității* N a materialului la un anumit nivel al tensiunilor, exprimată prin numărul ciclurilor de solicitare până la rupere. Tensiunea maximă a ciclurilor de solicitare care produce ruperea după N cicluri σ_N se numește *rezistența la durabilitate limitată* (STAS 6488-92).

Reprezentând curba lui Wöhler în coordonate semi-logaritmice, pentru majoritatea metalelor se obține o linie dreaptă, de ecuație $\sigma = c + b \cdot \log N$, deci comportarea materialului poate fi descrisă de o ecuație de forma

$$\sigma = a N^b, \quad (18.6)$$

unde a și b sunt constante de material, iar în cazul încercărilor la cicluri alternant simetrice, $\sigma = \sigma_a$. Constanta b se mai numește *exponentul lui Basquin*.

Ecuția (18.6) se mai scrie sub forma

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N)^b, \quad (18.7)$$

unde σ'_f este *coeficientul rezistenței la oboseală*. În general, $\sigma'_f \cong \tilde{\sigma}_{fB} > \sigma_r$, unde $\tilde{\sigma}_{fB}$ este *rezistența la rupere reală* calculată cu corecția Bridgman (4.21).

De notat că în ecuația (18.6) σ este de fapt o tensiune nominală, care de multe ori se notează S , pentru a arăta că nu este tensiunea reală, ci una convențională. La epruvete solicitate la încovoiere, σ este de fapt tensiunea maximă la suprafață, spre deosebire de încercările la întindere-compresiune, unde

tensiunile sunt uniform distribuite pe secțiune. Diagrama $\sigma - N$ la încovoiere diferă de cea obținută prin încercări la întindere-compresiune.

Pentru determinări mai precise, la fiecare valoare a tensiunii maxime se încearcă mai multe epruvete, curba fiind trasată prin punctele cu o anumită probabilitate de rupere. Aceasta complică încercările la oboseală, durata lor crescând considerabil, ceea ce a determinat elaborarea unor metode rapide de încercare, cu sarcină progresivă aplicată unei singure epruvete. Cele mai cunoscute sunt *metoda Prot* și *metoda Locati* [13].

18.3.3 Diagramele ciclurilor limită

Pentru o anumită solicitare (întindere, încovoiere, răsucire) limita de oboseală a unui material variază cu coeficientul de asimetrie R . Reprezentarea grafică a acestei dependențe se face prin *diagrame ale ciclurilor limită* (în trecut denumite și diagrame ale rezistențelor la oboseală [13]).

Diagrama Haigh (fig. 18.9, a) se trasează în coordonate $\sigma_a - \sigma_m$. Coordonatele unui punct σ_{mM} și σ_{aM} caracterizează complet ciclul de solicitare variabilă reprezentat prin punctul M . Se poate exprima panta liniei OM în funcție de coeficientul de asimetrie:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma_{aM}}{\sigma_{mM}} = \frac{\sigma_{\max M} - \sigma_{\min M}}{\sigma_{\max M} + \sigma_{\min M}} = \frac{1 - R}{1 + R}.$$

Se observă că toate punctele de pe o dreaptă care trece prin origine definesc cicluri de solicitare cu același coeficient de asimetrie (P. B. Haigh, 1917).

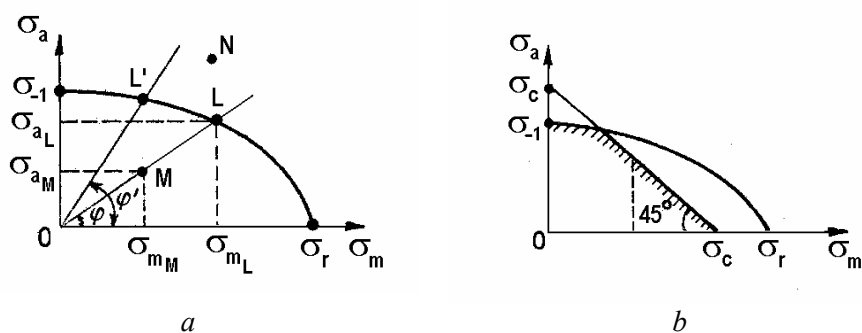


Fig. 18.9

Suma coordonatelor punctului M reprezintă tensiunea maximă a ciclului

$$\sigma_{\max M} = \sigma_{mM} + \sigma_{aM}. \quad (18.8)$$

Parcurgând dreapta OM , pe măsura îndepărtării de origine, tensiunea σ_{max} crește, astfel că în punctul L devine egală cu limita de oboseală a materialului, corespunzătoare valorii R a coeficientului de asimetrie

$$\sigma_{max_L} = \sigma_{m_L} + \sigma_{a_L} = \sigma_R. \quad (18.9)$$

Pe o altă dreaptă care trece prin origine, de înclinare mai mare $\varphi' > \varphi$, pe care se înscriu punctele ce reprezintă cicluri cu coeficientul de asimetrie $R' < R$, se găsește punctul L' , suma coordonatelor căruia este limita de oboseală $\sigma_{R'}$.

Locul geometric al punctelor L este *diagrama ciclurilor limită*. Orice punct M , situat în interiorul suprafeței delimitate de diagramă și axele de coordonate, definește un ciclu de solicitări variabile care nu duce la rupere prin oboseală. Punctele N situate în afara acestei suprafețe reprezintă cicluri care duc la rupere prin oboseală. Punctele L de pe curbă reprezintă *cicluri limită*.

Diagrama intersectează axa verticală în punctul de ordonată σ_{-1} , întrucât punctele de pe această axă au coeficientul de asimetrie $R = -1$. Axa orizontală este intersectată în punctul de abscisă σ_r , punctele de pe această axă având $R = +1$, corespunzând solicitării statice.

În cazul metalelor ductile, se urmărește ca tensiunea σ_{max} să nu depășească limita de curgere σ_c . Pentru aceasta, se înlocuiește partea din dreapta a diagramei ciclurilor limită (fig. 18.9, *b*) cu linia înclinată la 45° care intersectează axa orizontală în punctul de abscisă σ_c . Toate punctele de pe această dreaptă au $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_c$.

În vederea calculării coeficientului de siguranță la oboseală, se recurge la schematizarea prin linii drepte a diagramei ciclurilor limită.

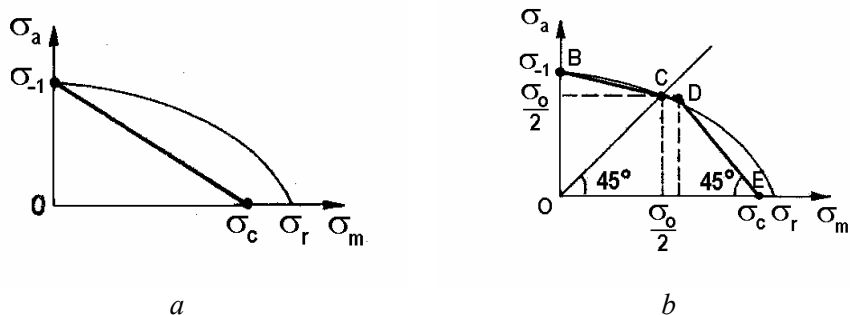


Fig. 18.10

În schematizarea lui C. R. Soderberg (1930), diagrama ciclurilor limită este o linie dreaptă (fig. 18.10, *a*), de ecuație

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c} = 1. \quad (18.10)$$

La materiale fragile se utilizează schematizarea lui J. Goodman (1899) modificată, care înlocuiește în ecuația (18.10) pe σ_c prin rezistența la rupere σ_r .

În schematizarea lui S. V. Serensen (1949), diagrama ciclurilor limită este înlocuită prin două linii drepte (fig. 18.10, b). Întâi se definește punctul C, cu $\sigma_m = \sigma_a = \sigma_o/2$, corespunzător ciclului pulsant limită. Se trasează apoi dreapta BC și dreapta DE care corespunde unei valori $\sigma_{max} = \sigma_c$. Deoarece punctele C și D sunt foarte apropiate, se poate utiliza schematizarea cu o linie frântă BCE.

În unele lucrări s-a mai utilizat schematizarea prin o parabolă de ecuație

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right)^2 = 1$$

propusă de W. Gerber (1874).

18.3.4 Diagrame de durabilitate constantă

Dacă dependența între amplitudinea tensiunii și tensiunea medie se reprezintă grafic pentru diferite valori ale durabilității N , se obțin diagrame cu mai multe curbe (fig. 18.11) numite *diagrame de durabilitate constantă*. Ordonatele punctelor de intersecție cu axa verticală, reprezentând amplitudinea tensiunii la o tensiune medie nulă, pentru epruveta fără concentrator, se notează σ_{ar} .

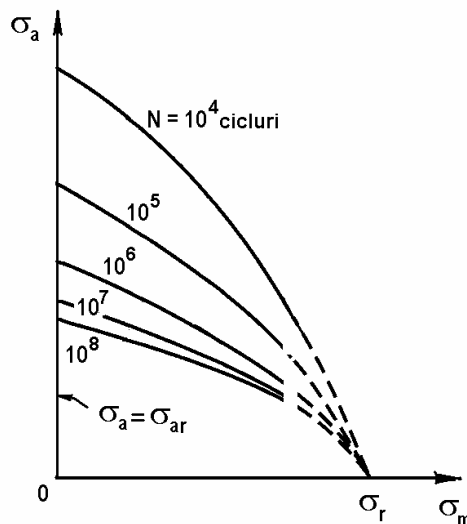


Fig. 18.11

S-a căutat o reprezentare care să nu depindă de durabilitate. Astfel s-a constatat că *diagramele amplitudine - tensiune medie normalizate*, în care se reprezintă raportul σ_a/σ_{ar} în funcție de σ_m , trasate pentru diferite durabilități N , se suprapun, deci pot fi reprezentate printr-o singură curbă, asemănătoare diagramei ciclurilor limită (fig. 18.12). Curba respectivă a fost schematizată apoi printr-o linie dreaptă de ecuație

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} = 1, \quad (18.11)$$

numită *dreapta lui Goodman*. S-a observat că această linie descrie comportarea materialelor cu ductilitate redusă, cum sunt oțelurile cu rezistență ridicată.

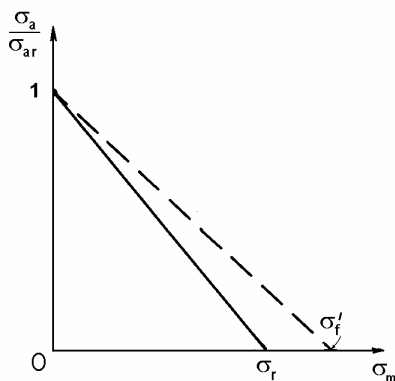


Fig. 18.12

La oțelurile ductile, datele experimentale pot fi approximate mai bine dacă în ecuația (8.11) se înlocuiește σ_r cu rezistența la rupere reală la solicitări ciclice σ'_f obținută din curba $\sigma - N$ pe epruvete fără concentrator solicitate axial cu cicluri alternant simetrice. Astfel J. Morrow (1968) a propus ecuația

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} = 1. \quad (18.11, a)$$

Pentru aliaje de aluminiu, se utilizează ecuația propusă de Smith, Watson și Topper (1970)

$$\sigma_{ar} = \sqrt{\sigma_{max} \sigma_a}, \quad (18.12)$$

sau, utilizând prima relație (18.5),

$$\sigma_{ar} = \sigma_{max} \sqrt{\frac{1-R}{2}}, \quad (18.12, a)$$

valabilă pentru $\sigma_{max} > 0$, care are avantajul că nu conține nici o constantă de material.

18.3.5 Factori care influențează rezistența la oboseală

Limita de oboseală a pieselor de mașini depinde de o serie de factori, dintre care o parte intervin în calculul la oboseală.

18.3.5.1 Concentrarea tensiunilor

Variația bruscă a secțiunii transversale a unei bare, sub forma unor găuri, canale de pană, creștături, filete, determină o creștere locală a tensiunilor produse de solicitări statice. Acestea depășesc valoarea nominală calculată neglijând neregularitățile de formă, denumite *concentratori* de tensiuni. Efectul *concentrării tensiunilor* este luat în considerație în special la materiale fragile, solicitate static și la materiale ductile, solicitate dinamic. Atingerea limitei de curgere la materialele ductile reduce considerabil efectul concentratorilor în cazul solicitării statice.

O piesă cu concentrator are o limită de oboseală inferioară limitei de oboseală a piesei similare fără concentrator.

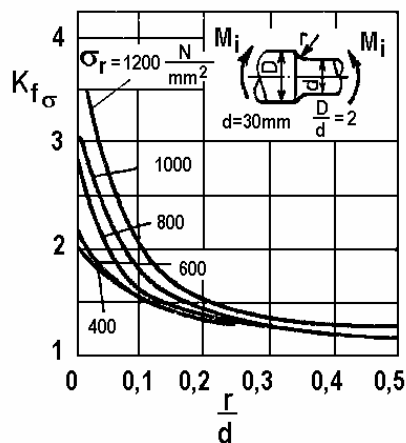


Fig. 18.13

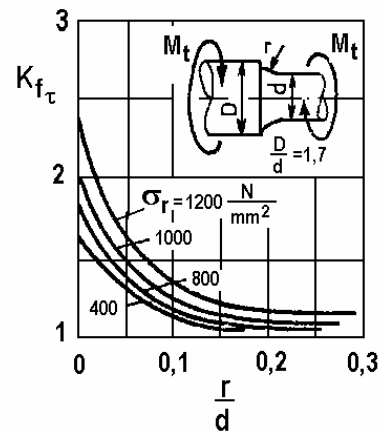


Fig. 18.14

Coefficientul efectiv de concentrare la oboseală K_f , corespunzător unui ciclu alternant simetric, se definește ca raportul dintre limita de oboseală σ_{-1} a unei epruvete fără concentrator și limita de oboseală $(\sigma_{-1})_k$ a unei epruvete cu concentrator de tensiuni, cu aceeași secțiune transversală și din același material

$$K_f = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_k} \quad (18.13)$$

Întrucât un ciclu asimetric se poate obține prin suprapunerea unui ciclu simetric, de amplitudine σ_a , peste o solicitare statică, de valoare σ_m , coeficientul K_f se aplică numai părții variabile a ciclului.

În figura 18.13 s-au reprezentat valorile lui $K_{f\sigma}$ pentru arbori din oțel, cu variație bruscă a diametrului și cu racordare, solicitați la încovoiere. Coeficientul $K_{f\sigma}$ este cu atât mai mare cu cât raza de racordare r este mai mică și rezistența la rupere σ_r a oțelului este mai mare. În figura 18.14 s-au reprezentat valorile coeficientului $K_{f\tau}$ pentru arbori din oțel solicitați la răsucire.

18.3.5.2 Dimensiunile piesei

Limita de oboseală a unei piese scade cu creșterea dimensiunilor secțiunii transversale.

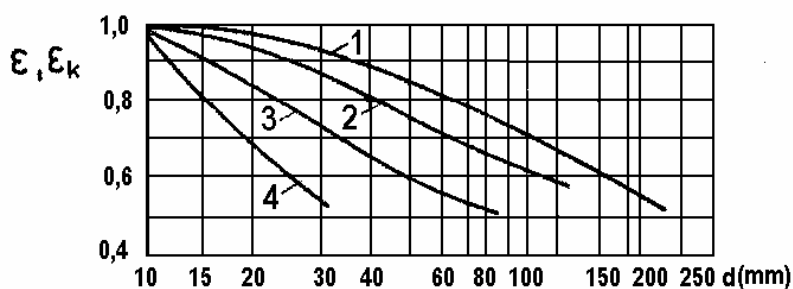


Fig. 18.15

Coeficientul dimensional ε se definește prin raportul între limita de oboseală, de exemplu la încovoiere $(\sigma_{-1})_d$ a unei epruvete cu diametrul d și limita de oboseală $(\sigma_{-1})_{d_0}$ a unei epruvete tip, cu diametrul $d_0 = 10$ mm (ambele epruvete fără concentrator de tensiuni), adică

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \quad (18.14)$$

În cazul când cele două epruvete au concentrator de tensiuni, factorul dimensional are expresia

$$\varepsilon_k = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_{d_0}} \quad (18.14, a)$$

În diagrama din figura 18.15 sunt redată valorile coeficienților ε și ε_k pentru solicitarea de încovoiere cu $R = -1$, în funcție de material, la diferite valori ale diametrului d al epruvetei. Curba 1 este pentru oțel carbon fără concentratori de tensiuni, curba 2 - pentru oțel aliat fără concentratori și pentru oțel carbon cu

concentratori moderați ($K_f = 1,8 \dots 2,0$), curba 3 - pentru oțel aliat cu concentratori moderați și curba 4 - pentru oțel aliat cu concentratori puternici.

Se observă că ε și ε_k sunt coeficienți subunitari, care scad cu creșterea diametrului, mai pronunțat la oțeluri cu rezistență mare și cu concentratori de tensiuni.

18.3.5.3 Starea suprafeței piesei

Un alt factor important care influențează limita de oboseală este starea suprafeței piesei. Astfel, prezența zgârieturilor, existența crustei de turnare, forjare sau laminare, acțiunea agenților corozivi, tratamentele termice incorecte sunt factori cu efect nefavorabil asupra rezistenței la oboseală.

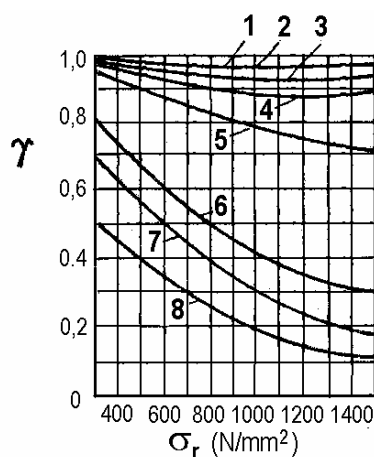


Fig. 18.16

Coeficientul de stare a suprafeței γ se definește prin raportul între limita de oboseală a unei epruvete care are o prelucrare oarecare $(\sigma_{-1})_p$ și limita de oboseală a unei epruvete cu aceleași dimensiuni, dar cu suprafața lustruită

$$\gamma = \frac{(\sigma_{-1})_p}{\sigma_{-1}} \quad (18.15)$$

În figura 18.16 se dau valorile lui γ pentru piese din oțel solificate la încovoiere cu $R = -1$. Linia 1 este pentru o suprafață lustruită, curba 2 - pentru o suprafață rectificată fin, curba 3 - pentru o suprafață rectificată semifin, curba 4 - pentru o suprafață finisată cu o sculă așchietoare, curba 5 - pentru o suprafață degroșată, curba 6 - pentru o suprafață cu crustă de laminare, curba 7 - pentru o suprafață supusă coroziunii în apă dulce și curba 8 - pentru o suprafață supusă coroziunii în apă sărată.

Se poate observa că o creștere substanțială a limitei de oboseală a unei piese se poate obține prin anumite tratamente superficiale prin care se îmbunătățește calitatea suprafeței: ecrusarea cu jet de alică, rularea cu role, călirea superficială, cementarea, nitrurarea, alitarea, prin care se realizează coeficienți $\gamma > 1$.

Din cele prezentate mai sus rezultă utilitatea diagramelor de tipul celor prezentate în figurile 18.13-18.16. De obicei se cunoaște limita de oboseală a materialului, determinată prin încercarea la oboseală pe epruveta lustruită, fără concentrator și cu anumite dimensiuni. Limita de oboseală a unei piese, care diferă de epruveta tip ca dimensiuni și stare a suprafeței, având și concentratori de tensiuni, se determină cu formula

$$(\sigma_R)_{piesa} = \frac{\varepsilon \cdot \gamma}{K_f} (\sigma_R)_{epruveta}, \quad (18.16)$$

care se deduce ușor din relațiile (18.13)-(18.15). Valorile coeficienților K_f , ε și γ sunt date în literatura tehnică [3, 17, 19, 20, 32, 56].

Limita de oboseală a metalelor scade cu creșterea temperaturii și în prezența agenților corozivi. Ea diferă în funcție de felul solicitării: încovoiere, întindere sau răsucire, fiind influențată defavorabil de existența suprasolicitărilor.

De interes practic la rotorii turbinelor de joasă presiune este *oboseala prin fretting*. Deteriorarea numită *coroziune prin fretting* apare frecvent la suprafețele corpurilor în contact direct, supuse la presiune normală și mișcare oscilantă relativă de mică amplitudine. Când corpurile respective sunt supuse simultan și la solicitări periodice, rezistența la oboseală descrește considerabil și acest fenomen este numit *oboseală prin fretting*.

18.3.6 Coeficientul de siguranță la durabilitate nelimitată

La solicitări statice, coeficientul de siguranță se definește ca raport între tensiunea corespunzătoare unei stări limită - de exemplu curgerea, și tensiunea maximă admisă cu o anumită siguranță

$$c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{max}}.$$

Pentru definirea coeficientului de siguranță la solicitări variabile prin ciclul reprezentat de punctul M (fig. 18.17) este necesar să se precizeze ciclul limită L cu care trebuie comparat ciclul M , astfel încât să existe o anumită siguranță definită prin coeficientul c .

Astfel, se poate alege punctul L_1 , care are aceeași tensiune medie ca și punctul M, punctul L_2 , care are aceeași tensiune minimă, punctul L_3 , care are aceeași amplitudine a tensiunii σ_a , sau punctul L , care are același coeficient de asimetrie R .

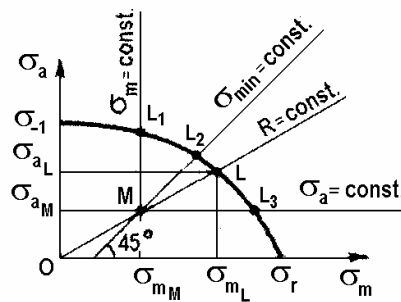


Fig. 18.17

În ultimul caz, coeficientul de siguranță se definește ca raport între tensiunea maximă a ciclului limită $\sigma_{\max L} = \sigma_R$ și tensiunea maximă a ciclului considerat $\sigma_{\max M}$:

$$c = \frac{\sigma_{\max L}}{\sigma_{\max M}} = \frac{\sigma_{mL} + \sigma_{aL}}{\sigma_{mM} + \sigma_{aM}}. \quad (18.17)$$

Valoarea lui c calculată cu formula (18.17) se compară cu valorile recomandate în norme sau standarde. Dacă din verificare rezultă un coeficient de siguranță inferior valorii prescrise, se modifică forma concentratorilor de tensiuni sau calitatea suprafeței, dimensiunile sau materialul piesei, până se ajunge la rezultatul dorit.

18.3.6.1 Metoda Soderberg

În cazul schematizării lui Soderberg, diagrama ciclurilor limită este o linie dreaptă (fig. 18.18). Aceasta reprezintă locul geometric al punctelor ce corespund unor cicluri de solicitare cu coeficientul de siguranță $c = 1$.

Fie un ciclu reprezentat prin punctul M ales astfel încât

$$\sigma_{\max M} = \frac{\sigma_{\max L}}{c} = \frac{\sigma_R}{c},$$

unde c este coeficientul de siguranță față de limita de oboseală. Dreapta $B'C'$, paralelă cu BC , este locul geometric al punctelor care definesc cicluri de solicitare pentru care coeficientul de siguranță la oboseală are valoarea c .

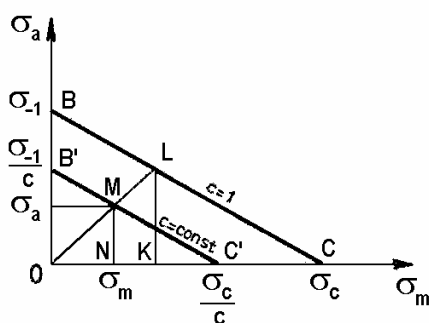


Fig. 18.18

Într-adevăr, din asemănarea triunghiurilor OMN și OLK , rezultă

$$\frac{OK}{ON} = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_{mM}} = \frac{LK}{MN} = \frac{\sigma_{aL}}{\sigma_{aM}} = \frac{OK + KL}{ON + NM} = \frac{\sigma_{maxL}}{\sigma_{maxM}} = c,$$

deci

$$OB' = \frac{\sigma_{-1}}{c}, \quad OC' = \frac{\sigma_c}{c}.$$

Ecuția dreptei $B'C'$ se scrie

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}/c} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c/c} = 1.$$

Rezultă

$$c = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}}, \quad (18.18)$$

unde σ_{-1} este limita de oboseală (la cicluri alternant simetrice) a piesei.

Dacă se notează σ_{-1} limita de oboseală a epruvetei tip (conform STAS 6488-92), atunci utilizând relația (18.16) se obține formula coeficientului de siguranță la solicitări prin cicluri nesimetrice pentru piesa reală

$$c_{\sigma} = \frac{1}{\frac{K_f \sigma_a}{\varepsilon \gamma \sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}}. \quad (18.19)$$

În cazul materialelor fragile, în formula (18.19) se înlocuiește σ_c prin σ_r , ceea ce corespunde diagramei lui J. Goodman (1899).

Dacă solicitarea se face prin cicluri simetrice, atunci $\sigma_m = 0$ și relația (18.19) devine

$$c_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_f}{\varepsilon \gamma} \sigma_a}. \quad (18.20)$$

Pentru solicitări la răsucire, în relațiile (18.19) și (18.20) se înlocuiește simbolul σ prin simbolul τ .

Relația (18.19) confirmă observațiile privind influența tensiunii medii asupra limitei de oboseală. Astfel, la epruvete fără concentrator s-a observat că pentru o durabilitate dată, amplitudinea admisibilă a tensiunii alternante scade când tensiunea medie este de întindere, și crește într-o măsură mai mică atunci când tensiunea medie este de compresiune. Aceasta se regăsește în aplicațiile practice, în care ecruisarea cu jet de alicie sau rularea cu role sunt utilizate pentru a produce deliberat tensiuni medii de compresiune la suprafața pieselor și a crește astfel limita de oboseală.

18.3.6.2 Metoda Serensen

Dacă se cunoaște σ_0 , atunci se poate efectua un calcul mai precis, utilizând schematizarea lui Serensen, care înlocuiește diagrama reală a ciclurilor limită prin linia frântă BDE (fig. 18.19).

Deoarece linia DE are o înclinare de aproximativ 45° , pentru ciclurile reprezentate prin puncte situate în triunghiul ODE ($0 \leq R \leq 1$), coeficientul de siguranță se calculează față de limita de curgere a materialului

$$c_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_m + \sigma_a}. \quad (18.21)$$

Pentru ciclurile reprezentate de puncte situate în triunghiul OBD ($-1 \leq R \leq 0$), se consideră un punct curent M prin care se duce dreapta $B'D'$, paralelă cu BD . Aceasta reprezintă locul geometric al ciclurilor cu coeficient de siguranță constant c , ceea ce permite definirea coordonatelor punctelor B' și D' (fig. 18.19).

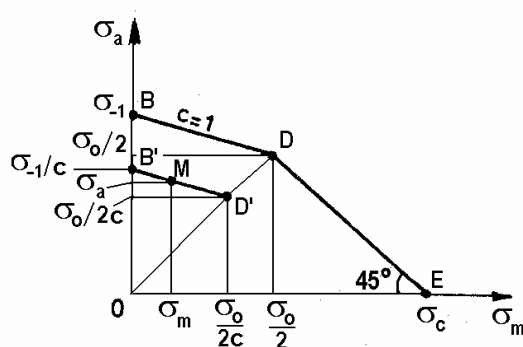


Fig. 18.19

Se scrie ecuația dreptei $B'D'$, cunoscând panta dreptei și coordonatele punctului D'

$$\sigma_a - \frac{\sigma_o}{2c} = -\frac{\frac{\sigma_{-1}}{c} - \frac{\sigma_o}{2c}}{\frac{\sigma_o}{2c}} \left(\sigma_m - \frac{\sigma_o}{2c} \right), \quad (18.22)$$

Rezolvând ecuația (18.22) în raport cu c , se obține

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_o}{\sigma_o} \sigma_m}. \quad (18.23)$$

Dacă se notează

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_o}{\sigma_o}, \quad (18.24)$$

relația (18.23) devine

$$c = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \psi \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}}. \quad (18.25)$$

Dacă se face verificarea unei piese și σ_{-1} este limita de oboseală a epruvetei tip, atunci relația (18.25) devine

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{K_f \sigma_a}{\varepsilon \gamma \sigma_{-1}} + \psi \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}}. \quad (18.26)$$

Pentru solicitări la răsucire, în relația de mai sus se înlocuiește simbolul σ prin simbolul τ .

Deoarece schematizarea lui Serensen este mai apropiată de curbă reală a ciclurilor limită decât schematizarea lui Soderberg, coeficientul de siguranță calculat cu metoda lui Serensen are valori mai mari decât cel calculat cu metoda Soderberg. Pentru ciclul reprezentat prin punctul M în figura 18.20, $c_{Soderberg} < 1$, punctul fiind situat în afara triunghiului OBE . Pe de altă parte însă, $c_{Serensen} > 1$, punctul M fiind în interiorul patrulaterului $OBDE$.

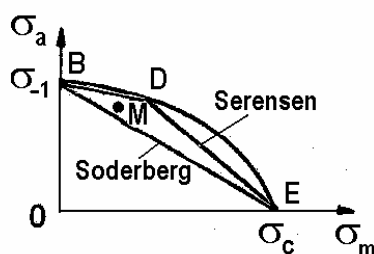


Fig. 18.20

Pentru utilizarea relației (18.25) este necesară cunoașterea coeficientului ψ , deci a limitei de oboseală la cicluri pulsante σ_0 .

18.3.6.3 Coeficientul de siguranță la solicitări combinate

În cazul solicitărilor combinate statice (v. Cap.11), locul geometric al stărilor care duc la atingerea limitei de curgere este reprezentat, în coordonate $\tau - \sigma$, printr-un arc de elipsă, ca în figura 18.21.

Pentru solicitările combinate, produse de sarcini variabile ciclice, s-a căutat stabilirea unei dependențe similare între tensiunile tangențiale și cele normale.

În figura 18.22 se prezintă diagrama lui H. J. Gough și H. V. Pollard (1924) care, pentru încovoiere și răsucire, prin cicluri simetrice în fază, au stabilit experimental o relație de forma

$$\left(\frac{\sigma_{aL}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{aL}}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1, \quad (18.27)$$

reprezentând un sfert de elipsă. Curba intersectează axa orizontală în punctul de abscisă σ_{-1} , corespunzător solicitării simple la încovoiere prin ciclu simetric, iar

axa verticală în punctul de ordonată τ_{-1} , corespunzător solicitării simple la răsucire prin ciclu simetric.

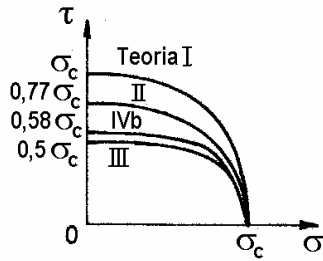


Fig. 18.21

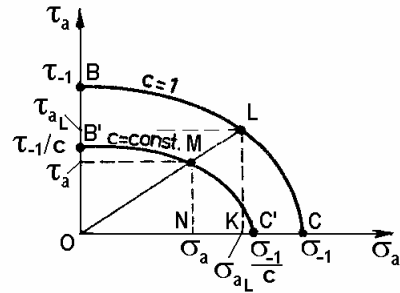


Fig. 18.22

Deoarece punctele de pe diagramă reprezintă cicluri limită, care produc ruperea prin oboseală după un număr nelimitat de cicluri de solicitare, ele vor avea un coeficient de siguranță $c=1$. Se construiește arcul de elipsă $B'MC'$, asemenea cu BLC , locul geometric al punctelor ce reprezintă cicluri de solicitare combinată, cu coeficient de siguranță $c = const$.

Se constată că

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OK}{ON} = \frac{KL}{NM} = \frac{OK + KL}{ON + NM} = c$$

deci

$$\frac{\sigma_{aL}}{\sigma_a} = \frac{\tau_{aL}}{\tau_a} = c. \quad (18.28)$$

Ecuția (18.27) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\left(\frac{\sigma_{aL}}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{aL}}{\tau_a}\right)^2}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{-1}}{\tau_a}\right)^2} = 1, \quad (18.29)$$

unde se observă că rapoartele

$$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} = c_\sigma, \quad \frac{\tau_{-1}}{\tau_a} = c_\tau \quad (18.30)$$

sunt coeficienții de siguranță la solicitările simple de încovoiere și răsucire prin cicluri simetrice.

Înlocuind (18.28) și (18.30) în (18.29) rezultă

$$\frac{c^2}{c_\sigma^2} + \frac{c^2}{c_\tau^2} = 1,$$

deci coeficientul de siguranță la solicitări combinate (relația se extinde și pentru solicitări prin cicluri asimetrice) este

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}}, \quad (18.31)$$

formulă valabilă pentru materiale ductile.

Pentru materiale fragile, coeficientul de siguranță la oboseală se calculează din ecuația

$$\frac{c^2}{c_\sigma^2}(\phi - 1) + \frac{c}{c_\sigma}(2 - \phi) + \frac{c^2}{c_\tau^2} = 1,$$

în care

$$\phi = \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}$$

este raportul limitelor de oboseală la cicluri simetrice de încovoiere și răsucire.

Exemplul 18.1

Un arbore de secțiune circulară, cu diametrul $d = 40 \text{ mm}$, având suprafața rectificată fin, este confecționat din oțel OL50 cu $\sigma_{-1} = 200 \text{ N/mm}^2$. Să se calculeze coeficientul de siguranță la oboseală, dacă arborele este solicitat la încovoiere de un moment care variază între limitele $\pm 640 \text{ Nm}$.

Rezolvare

Pentru solicitarea prin ciclu alternant simetric se utilizează relația (18.20). Se calculează

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 40^3}{32} = 6,28 \cdot 10^3 \text{ mm}^3,$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{640 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^3} = 101,9 \text{ N/mm}^2.$$

Pentru suprafața rectificată fin și $\sigma_r = 500 \text{ N/mm}^2$, de pe curba 2 din figura 18.16 se obține $\gamma = 0,97$. Din figura 18.15 se obține $\varepsilon = 0,88$ (curba 1 și $d = 40 \text{ mm}$). Se consideră $K_f = 1$.

Rezultă coeficientul de siguranță

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_f}{\varepsilon \gamma} \sigma_a} = \frac{200}{\frac{1}{0,88 \cdot 0,97} 101,9} = 1,67.$$

Exemplul 18.2

Arborele din figura 18.23 transmite o putere $P = 343 \text{ kW}$ la turația $n = 5000 \text{ rot/min}$, fiind fabricat din oțel aliat cu $\sigma_r = 1200 \text{ N/mm}^2$ și $\sigma_{-1} = 600 \text{ N/mm}^2$. Ce valoare are coeficientul de siguranță pentru solicitarea la răsucire cu un ciclu pulsant, dacă suprafața arborelui este rectificată? Se consideră $\tau_r = \sigma_r/2$ și $\tau_{-1} = \sigma_{-1}/2$.

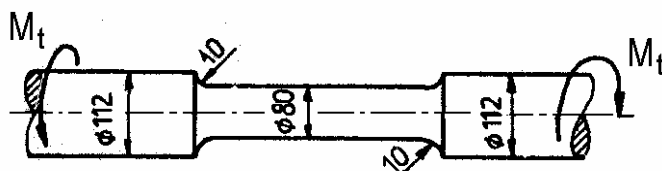


Fig. 18.23

Rezolvare

Momentul de torsiune maxim este

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \frac{343}{500} = 6,55 \text{ kNm}.$$

În secțiunea periculoasă

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 80^3}{16} = 100,53 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Rezultă

$$\tau_{max} = 2\tau_a = 2\tau_m = \frac{M_t}{W_p} = \frac{6,55 \cdot 10^6}{100,53 \cdot 10^3} = 65,15 \text{ N/mm}^2.$$

Din figura 18.14, pentru $r/d = 10/80 = 0,125$ și $\sigma_r = 1200 \text{ N/mm}^2$ rezultă $K_f = 1,25$. Din figura 18.15 se obține $\varepsilon = 0,76$ iar din figura 18.16, $\gamma = 0,93$.

Coeficientul de siguranță este

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{K_f}{\varepsilon \gamma} \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_r}} = \frac{1}{\frac{1,25}{0,76 \cdot 0,93} \frac{65,15}{300} + \frac{65,15}{600}} = 2,03.$$

Exemplul 18.3

O pârghie de secțiune circulară, cu forma și dimensiunile din figura 18.24, este solicitată de o forță $F = 5 \text{ kN}$ cu un ciclu pulsant. Să se calculeze coeficientul de siguranță global în secțiunea $I-I$, dacă pârghia este din oțel carbon rectificat, cu $\sigma_r = 800 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{-1} = 380 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_c = 620 \text{ N/mm}^2$, $\tau_c = 500 \text{ N/mm}^2$ și $\tau_{-1} = 280 \text{ N/mm}^2$.

Rezolvare

În secțiunea $I-I$, pentru $d = 60 \text{ mm}$, rezultă

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 60^3}{32} = 21,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3, \quad W_p = 2 W_y = 42,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

și eforturile

$$M_{t_{max}} = 200F = 200 \cdot 5000 = 10^6 \text{ Nmm},$$

$$M_{i_{max}} = 300F = 300 \cdot 5000 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Se obține

$$\tau_{max} = \frac{M_{t_{max}}}{W_p} = \frac{10^6}{42,4 \cdot 10^3} = 23,5 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{\tau_{max}}{2} = 11,8 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i_{max}}}{W_y} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{21,2 \cdot 10^3} = 70,75 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2} = 35,4 \text{ N/mm}^2 .$$

Din figurile 18.13-18.16 se calculează, pentru $r/d = 0,1$ și $\sigma_r = 800 \text{ N/mm}^2$: $K_{f\sigma} = 1,3$, $K_{f\tau} = 1,2$, $\varepsilon = 0,8$ și $\gamma = 0,97$.

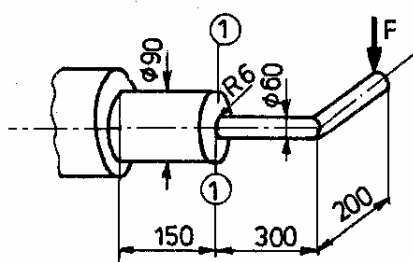


Fig. 18.24

Utilizând relația (18.19), se calculează

$$c_{\sigma} = \frac{1}{\frac{K_{f\sigma} \sigma_a}{\varepsilon \gamma \sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}} = \frac{1}{\frac{1,3}{0,8 \cdot 0,97} \frac{35,4}{380} + \frac{35,4}{620}} = 4,69 ,$$

$$c_{\tau} = \frac{1}{\frac{K_{f\tau} \tau_a}{\varepsilon \gamma \tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_c}} = \frac{1}{\frac{1,2}{0,8 \cdot 0,97} \frac{11,8}{280} + \frac{11,8}{500}} = 11,26$$

apoi, coeficientul de siguranță la solicitarea combinată

$$c = \frac{c_{\sigma} \cdot c_{\tau}}{\sqrt{c_{\sigma}^2 + c_{\tau}^2}} = \frac{4,69 \cdot 11,26}{\sqrt{4,69^2 + 11,26^2}} = 4,33 .$$

18.3.7 Estimarea duratei de viață

În cazul solicitărilor cu tensiuni peste limita de oboseală, dar care se mențin în domeniul elastic, se face un calcul la durabilitate limitată, adică se calculează numărul de cicluri până la rupere.

Se presupune că se cunoaște curba $\sigma - N$ pentru solicitarea prin cicluri alternant simetrice, având o ecuație de forma (18.7).

Deoarece constantele σ'_f și b se măsoară prin încercări cu $\sigma_m = 0$, se poate înlocui amplitudinea tensiunii σ_a prin σ_{ar} , considerată ca o *amplitudine echivalentă*, din punct de vedere al duratei de viață, la o solicitare cu tensiunea medie diferită de zero. Ecuația (18.7) devine

$$\sigma_{ar} = \sigma'_f (2N)^b. \quad (18.7, a)$$

Din ecuația lui Morrow (18.11) se obține

$$\sigma_{ar} = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}}, \quad (18.11, a)$$

deci

$$\sigma_a = (\sigma'_f - \sigma_m) (2N)^b. \quad (18.32)$$

Reprezentând ecuația (18.32) în coordonate logaritmice, rezultă curbele $\sigma_a - N$ pentru diverse valori ale tensiunii medii, care sunt linii drepte paralele.

Din ecuația (18.32) se calculează numărul de cicluri până la rupere

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma'_f - \sigma_m} \right)^{1/b}. \quad (18.32, a)$$

Se observă că, pentru a ține cont de influența tensiunii medii la solicitări cu cicluri nesimetrice, se înlocuiește σ'_f prin $\sigma'_f - \sigma_m$ în ecuația (18.7, a), operație denumită *corecția lui Morrow*.

La aliajele de aluminiu, durata de viață se calculează utilizând parametrul Smith, Watson, Topper (*SWT*). Din ecuațiile (18.12) și (18.7) se obține

$$\sqrt{\sigma_{max} \sigma_a} = \sigma'_f (2N)^b, \quad (18.33)$$

de unde se calculează numărul de cicluri până la rupere din relația

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(\sigma_m + \sigma_a) \sigma_a}}{\sigma'_f} \right)^{1/b} \quad (18.33, a)$$

sau, utilizând prima relație (18.5),

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma'_f} \sqrt{\frac{1-R}{2}} \right)^{1/b}. \quad (18.33, b)$$

18.4 Caracteristici mecanice la încărcări ciclice

Perfecționarea mașinilor și metodelor de încercare la oboseală a permis încărcarea epruvetelor cu cicluri de deformații specifice impuse și măsurarea tensiunilor produse de acestea. Astfel a fost posibil studiul comportării în regim elasto-plastic, știut fiind faptul că oboseala este determinată în principal de deformațiile plastice. Solicitarea la încovoiere a fost înlocuită cu solicitarea axială, care produce tensiuni uniforme în secțiunea transversală a epruvetei. Datele experimentale reprezentate în coordonate logaritmice au fost aproximate prin linii drepte, stabilindu-se expresii analitice simple, convenabile din punct de vedere matematic, dar care nu se bazează pe principii fizice.

18.4.1 Efectul Bauschinger

Diagrama caracteristică $\sigma - \varepsilon$ la solicitări ciclice poate diferi de diagrama obținută la solicitări monotone (v. Cap. 4). Fenomenul a fost observat de J. Bauschinger (1887) și este ilustrat în figura 18.25.

La un metal care are aceleași proprietăți la întindere și compresiune, solicitarea axială a unei epruvete peste limita de curgere are ca efect reducerea limitei de curgere la solicitarea de semn contrar.

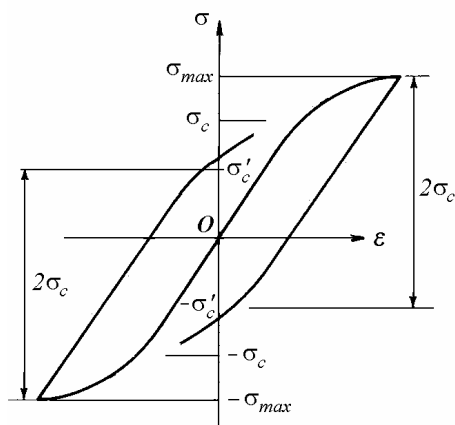


Fig. 18.25

Dacă epruveta este solicitată întâi la întindere, până la o tensiune σ_{max} mai mare ca limita de curgere σ_c , atunci prin solicitarea ulterioară la compresiune, curgerea apare la o tensiune $(-\sigma'_c)$ inferioară ca mărime limitei de curgere $(-\sigma_c)$. Invers, dacă epruveta este solicitată întâi la compresiune până la o tensiune

($-\sigma_c$) astfel că $|\sigma_c| > |\sigma'_c|$. Prin solicitarea ulterioară la întindere, limita de curgere apare la o tensiune $\sigma'_c < \sigma_c$.

18.4.2 Bucla de histerezis

În coordonate $\sigma - \varepsilon$, răspunsul unui material solicitat inelastic la un ciclu complet de întindere-compresiune are forma unei bucle de histerezis (fig. 18.26).

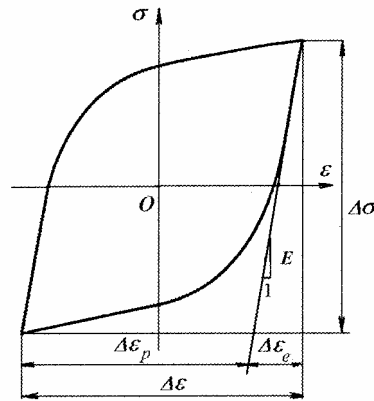


Fig. 18.26

Lățimea totală a curbei este $\Delta\varepsilon$ - variația deformației specifice totale. Înălțimea totală a curbei este $\Delta\sigma$ - variația tensiunii totale. Acestea pot fi exprimate în funcție de amplitudini

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon}{2} \quad \sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2}, \quad (18.34)$$

unde ε_a este amplitudinea deformației specifice ciclice, iar σ_a este amplitudinea tensiunii ciclice.

Variația deformației specifice totale este egală cu suma variațiilor deformațiilor specifice elastice și plastice

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p, \quad (18.35)$$

sau, în funcție de amplitudini și utilizând legea lui Hooke $\Delta\varepsilon_e = \Delta\sigma/E$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2}. \quad (18.36)$$

Aria buclei de histerezis este egală cu energia de deformație specifică disipată într-un ciclu de solicitare. Ea reprezintă o măsură a lucrului mecanic de deformare plastică efectuat asupra materialului.

18.4.3 Ecruisarea și înmuierea ciclică

Solicitarea ciclică modifică buclele succesive de histerezis la majoritatea metalelor. În funcție de aceste modificări există: a) materiale cu ecruisare ciclică, b) materiale cu înmuiere ciclică, c) materiale ciclic stabile și d) materiale cu comportare mixtă (cu ecruisare sau înmuiere, în funcție de mărimea deformațiilor specifice).

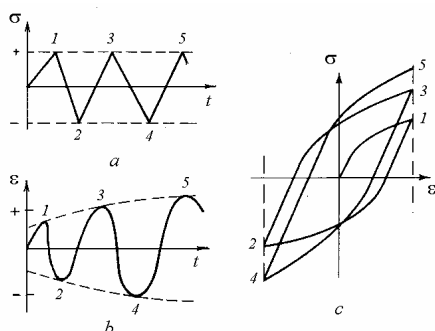


Fig. 18.27

Dacă un material cu *ecruisare ciclică* este încărcat cu cicluri alternant-simetrice de amplitudine constantă a deformației specifice (fig. 18.27, a), la început tensiunile corespunzătoare cresc (fig. 18.27, b). Punctele de întoarcere ale buclelor succesive de histerezis, unde se schimbă semnul solicitării, au ordonate crescătoare (fig. 18.27, c).

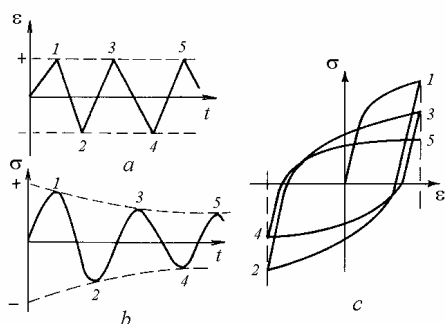


Fig. 18.28

La un material cu *înmuiere ciclică* încărcat cu cicluri alternant-simetrice de amplitudine constantă a deformației specifice (fig. 18.28, a), tensiunile

corespunzătoare scad (fig. 18.28, *b*), iar punctele de întoarcere ale buclelor succesive de histerzis au ordonate descrescătoare (fig. 18.28, *c*).

Această comportare tranzitorie depinde de starea inițială a materialului. Astfel, la un aliaj de cupru, după o recoacere de revenire s-a obținut comportarea cu ecrusare din figura 18.29, *a*, și după o recoacere parțială, comportarea mixtă din figura 18.29, *b*.

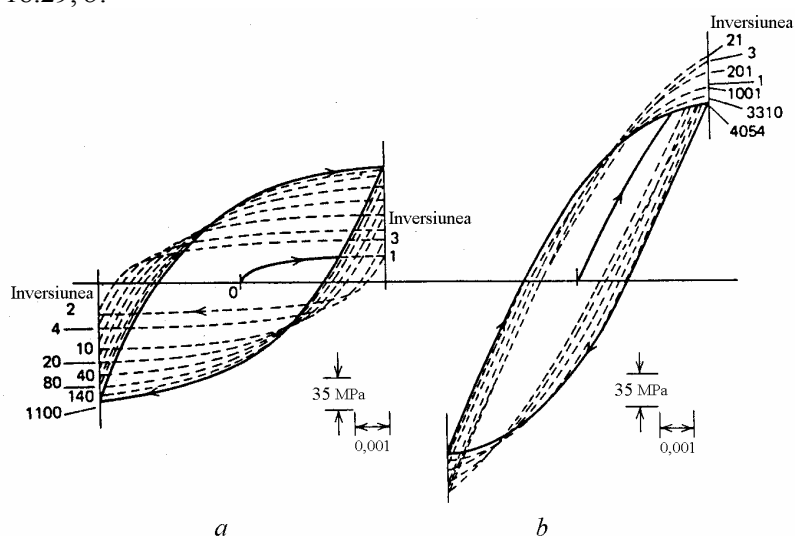


Fig. 18.29

În general, s-a observat că raportul între rezistența la rupere și limita de curgere ale materialului poate fi utilizat pentru predicția comportării tranzitorii (R. W. Smith *et al* - 1963). Astfel, dacă $\sigma_r/\sigma_c > 1,4$ materialul este posibil să se ecruseze ciclic, iar dacă $\sigma_r/\sigma_c < 1,2$ materialul se poate înmuia ciclic.

După un anumit număr de cicluri apare un fenomen de saturare, variațiile de tensiune de la un ciclu de solicitare la altul devin neglijabile, bucla de histerzis se stabilizează iar materialul devine *ciclic stabil*. Deoarece se apreciază că stabilizarea apare după 20-40% din numărul de cicluri care produc cedarea, proprietățile de oboseală se determină la 50% din durabilitatea estimată.

18.4.4 Diagrama caracteristică $\sigma - \varepsilon$ ciclică

Unind punctele de întoarcere ale buclelor de histerzis stabilizate, obținute la diferite niveluri ale solicitării ciclice, se obține *diagrama caracteristică $\sigma - \varepsilon$ ciclică* (fig. 18.30).

Se pot folosi mai multe epruvete identice, încărcând fiecare epruvetă cu cicluri alternant simetrice de amplitudine constantă a deformației specifice,

suprapunând apoi buclele de histerezis stabile și unind punctele de întoarcere (fig. 18.31).

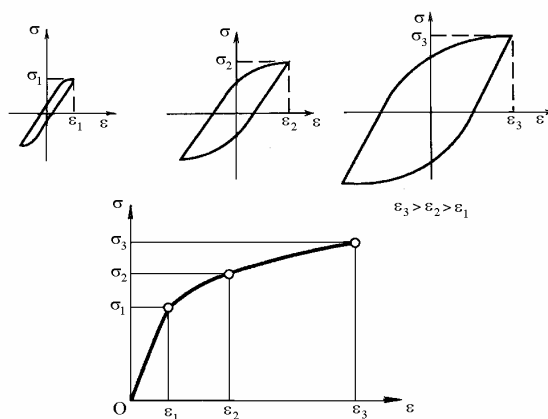


Fig. 18.30

Un procedeu mai rapid se bazează pe încercarea la deformație incrementală. O singură epruvetă este încercată la o serie de blocuri conținând cicluri de amplitudine crescătoare și descrescătoare a amplitudinii deformației specifice. După un număr de blocuri de solicitare materialul se stabilizează. Dacă epruveta este solicitată apoi până la rupere, curba "tensiune - deformație specifică" este aproape identică cu cea obținută unind punctele de întoarcere ale buclelor de histerezis.

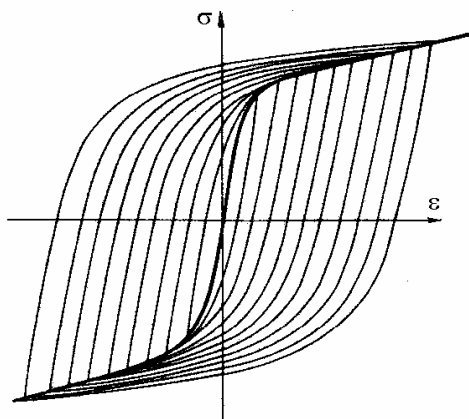


Fig. 18.31

Diagrama caracteristică la încărcări ciclice diferă de diagrama caracteristică la încărcări monotone (fig. 4.8), după cum se arată în figura 18.32

pentru: a) material cu ecruisare ciclică, b) material cu înmuiere ciclică, c) material cu comportare mixtă. S-a notat *C* - curba ciclică, *M* - curba monotonă.

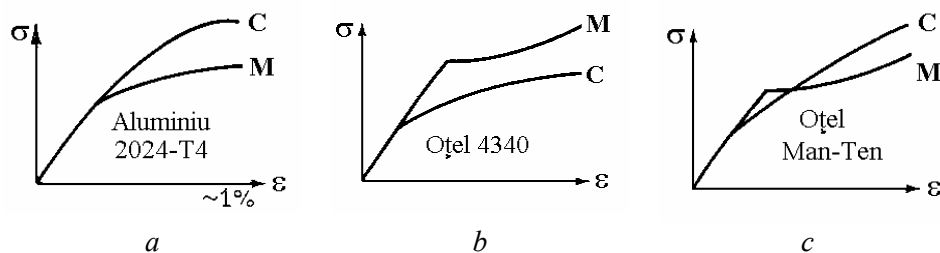


Fig. 18.32

18.4.5 Ipoteza lui Massing

Cunoscând curba $\sigma - \varepsilon$ ciclică, se poate construi bucla de histeresis stabilizată pentru un material cu comportare simetrică la întindere și compresiune.

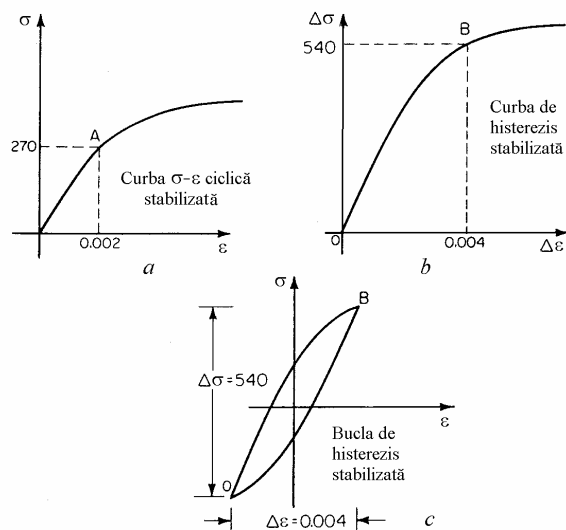


Fig. 18.33

Conform ipotezei lui G. Massing (1926), bucla de histeresis stabilizată se poate obține dublând diagrama $\sigma - \varepsilon$ ciclică (fig. 18.33). Astfel, dublând valorile tensiunii și deformației specifice corespunzătoare punctului *A* de pe curba $\sigma - \varepsilon$ ciclică (fig. 18.33, *a*) se obține punctul *B* de pe bucla de histeresis (fig. 18.33, *b*). În figura 18.33, *c* se prezintă bucla de histeresis pentru o încărcare cu ciclu alternant

simetric. De notat poziția punctului O pe curbele de histerezis din figurile 18.32, b și c , în care arcele OB sunt identice.

18.4.6 Relația tensiuni - deformații specifice plastice

Ca și în cazul curbei caracteristice monotone, o diagramă a tensiunii reale ciclice stabilizate, la ciclu alternant simetric, în funcție de deformația specifică plastică reală, reprezentată în coordonate logaritmice, poate fi aproximată printr-o linie dreaptă. Similar relației (4.19) stabilite pentru încărcări monotone, la încărcări ciclice se stabilește relația

$$\sigma = K' (\varepsilon_p)^{n'}, \quad (18.37)$$

sau

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}, \quad (18.38)$$

în care K' este *modulul de ecrusare ciclică*, n' este *exponentul de ecrusare ciclică* (conform STAS 6488-92), σ este amplitudinea tensiunii ciclice stabile iar ε_p este amplitudinea deformației specifice plastice ciclice stabile.

Relația (4.20), valabilă pentru încărcări monotone, devine

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (18.39)$$

având forma ecuației Ramberg-Osgood (Cap.4).

Ecuția diagramei caracteristice la solicitări ciclice (18.39) se mai poate scrie sub forma

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon'_f \left(\frac{\sigma}{\sigma'_f} \right)^{\frac{1}{n'}},$$

unde ε'_f este ductilitatea la rupere la solicitări ciclice denumită *coeficientul ductilității la oboseală* iar σ'_f este rezistența reală la rupere la solicitări ciclice denumită *coeficientul rezistenței la oboseală* (v. § 18.5.1). Valori numerice pentru câteva metale sunt date în Anexa 8.

18.4.7 Ecuația buclei de histerezis

Ecuția buclei de histerezis se obține din ecuația (18.39) utilizând ipoteza lui Massing, deci scriind relațiile între coordonatele celor două curbe

$$\Delta\sigma = 2\sigma, \quad \Delta\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Înlocuind $\sigma = \frac{\Delta\sigma}{2}$ și $\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon}{2}$ în relația (18.39) se obține

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (18.40)$$

sau, înmulțind cu 2,

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{\frac{1}{n'}}. \quad (18.40, a)$$

Exemplul 18.4

O epruvetă din oțel, cu următoarele proprietăți ciclice $K' = 1204 \text{ MPa}$, $n' = 0,202$ și $E = 207 \text{ GPa}$, este solicitată la un ciclu alternant simetric, cu $\Delta\varepsilon = 0,04$. Se cere să se deseneze diagrama caracteristică ciclică și bucla de histerezis stabilizată.

Rezolvare

În figura 18.34, *a* se prezintă istoria solicitării. Se presupune că în timpul deformării inițiale de la zero până în punctul 1, de amplitudine maximă a deformației specifice, răspunsul materialului urmează diagrama caracteristică ciclică, de ecuație (18.39). Pentru o deformație specifică maximă $\Delta\varepsilon/2 = 0,02$ se obține ecuația

$$\sigma_1 = 207000 \left[0,02 - \left(\frac{\sigma_1}{1204}\right)^{\frac{1}{0,202}} \right]$$

de unde rezultă

$$\sigma_1 = 531,5 \text{ MPa} .$$

În continuare, se presupune că răspunsul materialului este descris de bucla de histerezis stabilă, de ecuație (18.40, *a*), neglijând ecrisarea sau înmuierea ciclică. Înlocuind valorile cunoscute, se obține ecuația

$$0,04 = \frac{\Delta\sigma}{207000} + 2\left(\frac{\Delta\sigma}{2 \cdot 1204}\right)^{\frac{1}{0,202}} .$$

Rezultă

$$\Delta\sigma = 1063 \text{ MPa} .$$

Valorile tensiunii și deformației specifice în punctul 2 sunt

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \Delta\varepsilon = 0,02 - 0,04 = -0,02 \text{ ,}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \Delta\sigma = 531,5 - 1063 = -531,5 \text{ MPa .}$$

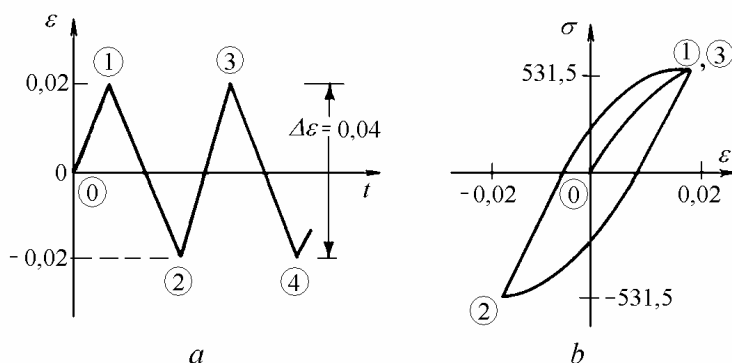


Fig. 18.34

Valorile corespunzătoare punctului 3 se determină utilizând ecuația buclei de histerezis (18.40, *a*). Se obțin valorile corespunzătoare punctului 1, ceea ce confirmă închiderea buclei de histerezis. În toate ciclurile care urmează, răspunsul materialului se face în lungul buclei de histerezis (Fig. 18.34, *b*). Neglijarea înmuierii sau ecruisării ciclice nu influențează semnificativ durata de viață estimată considerând răspunsul staționar.

18.5 Calculul la oboseală prin analiza deformațiilor specifice

Metoda $\varepsilon - N$ ia în considerație deformațiile plastice care reprezintă cauza inițierii fisurilor de oboseală. Efectele locale sunt analizate considerând geometria reală a concentratorului. Criteriul de cedare poate fi variația bruscă a pantei diagramei forță-deformație (rigiditatea dinamică) a epruvetei încercate sau apariția unei fisuri observabile.

Se presupune că, la același nivel al deformațiilor specifice, materialul din zona cu concentrator a piesei reale se comportă la fel cu materialul dintr-o epruvetă fără concentrator, solicitată la o stare plană de tensiuni (fig. 18.35). Cu alte cuvinte, se admite că același număr de cicluri de solicitare este necesar pentru a dezvolta o fisură la vârful concentratorului unei piese reale ca și într-o epruvetă fără concentrator, dacă cele două regiuni fisurate sunt supuse la aceeași istorie de tensiuni și deformații specifice ciclice. Metoda se poate adapta ușor la solicitări cu amplitudine variabilă.

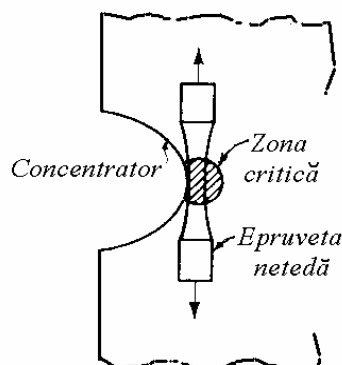


Fig. 18.35

18.5.1 Diagrama "deformație specifică - durabilitate"

Rezistența la oboseală a metalelor este definită de numărul de cicluri de solicitare necesare pentru a produce cedarea. În locul numărului de cicluri de amplitudine constantă se utilizează *numărul de inversiuni*, egal cu numărul de schimbări de semn ale variației deformației specifice (o inversiune = jumătate de ciclu). Corespunzător, se lucrează cu variații ale tensiunilor $\Delta\sigma$ și variații ale deformațiilor specifice $\Delta\varepsilon$.

Variația deformației specifice totale este descompusă în cele două componente, cea elastică și cea plastică (fig. 18.26). S-a constatat că variația fiecărei componente în funcție de numărul de inversiuni poate fi reprezentată în coordonate logaritmice printr-o linie dreaptă.

În domeniul elastic, O. H. Basquin (1910) a propus o relație de forma

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f (2N)^b, \quad (18.41)$$

unde $\Delta\sigma/2$ este amplitudinea tensiunii reale, $2N$ - numărul de inversiuni până la cedare, σ'_f - *coeficientul rezistenței la oboseală*, iar b - *exponentul rezistenței la oboseală* (exponentul lui Basquin).

Pentru componenta elastică a amplitudinii deformațiilor specifice rezultă

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b. \quad (18.42)$$

unde σ'_f și b sunt proprietăți de oboseală ale materialului. Coeficientul rezistenței la oboseală σ'_f este aproximativ egal cu rezistența la rupere reală σ_f . Exponentul rezistenței la oboseală b variază între -0,05 și -0,12 (v. Anexa 8).

Pentru componenta plastică a amplitudinii deformațiilor specifice, L. F. Coffin (1954) și S. S. Manson (1953) au stabilit relația

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N)^c \quad (18.43)$$

unde $\Delta \varepsilon_p / 2$ este amplitudinea deformațiilor specifice plastice, $2N$ - numărul de inversiuni până la cedare, ε'_f - coeficientul ductilității la oboseală, iar c - exponentul ductilității la oboseală.

În relația (18.43) ε'_f și c sunt proprietăți ciclice ale materialului. Coeficientul ductilității la oboseală ε'_f este aproximativ egal cu ductilitatea la rupere reală ε_f iar exponentul ductilității la oboseală c variază între -0,5 și -0,7.

Înlocuind expresiile (18.42) și (18.43) în relația (18.35), J. Morrow (1965) a stabilit relația

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c, \quad (18.44)$$

care se numește *ecuația Coffin-Manson*.

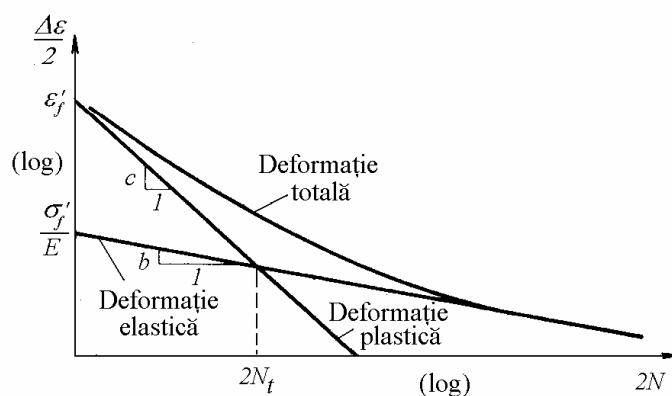


Fig. 18.36

Ecuația (18.44) stă la baza metodei "deformație specifică - durabilitate", numită pe scurt *metoda $\varepsilon - N$* . Ea poate fi explicată grafic pe baza faptului că, în coordonate logaritmice, dependența deformațiilor specifice elastice și plastice de

numărul de inversiuni este dată prin linii drepte. Curba amplitudinii deformației specifice totale se obține prin însumarea ordonatelor celor două drepte (fig. 18.36). La deformații specifice mari (durabilitate mică) curba tinde spre linia deformațiilor specifice plastice, iar la deformații specifice mici (durabilitate mare) curba tinde spre linia deformațiilor specifice elastice.

Aceasta ilustrează faptul că cedarea la un număr redus de cicluri de solicitare se datorește deformațiilor plastice, iar la un număr mare de cicluri se datorește deformațiilor elastice. Tranziția se face la un număr de inversiuni $2N_t$, la care $\Delta\varepsilon_e/2 = \Delta\varepsilon_p/2$, număr definit de relația

$$2N_t = \left(\frac{E \varepsilon'_f}{\sigma'_f} \right)^{1/(b-c)}$$

La solicitări cu durata totală mai mică decât cea corespunzătoare tranziției, deformațiile plastice sunt mai mari ca cele elastice. La cele cu durată mai mare decât cea de tranziție, deformațiile elastice sunt dominate față de cele plastice. Această distincție este importantă în alegerea unei soluții la o problemă de oboseală. Astfel, problemele de oboseală la număr relativ mare de cicluri de solicitare se rezolvă prin alegerea unui material cu rezistența la rupere mai mare sau prin aplicarea unor tratamente superficiale, ca ecrusarea cu jet de alicie sau nitrurarea. Aceste soluții sunt ineficiente în problemele de oboseală la număr redus de cicluri. În acest caz, alegerea unui material cu rezistența la rupere σ_r mai mare și deci, cu ductilitate scăzută, poate înrăutăți situația.

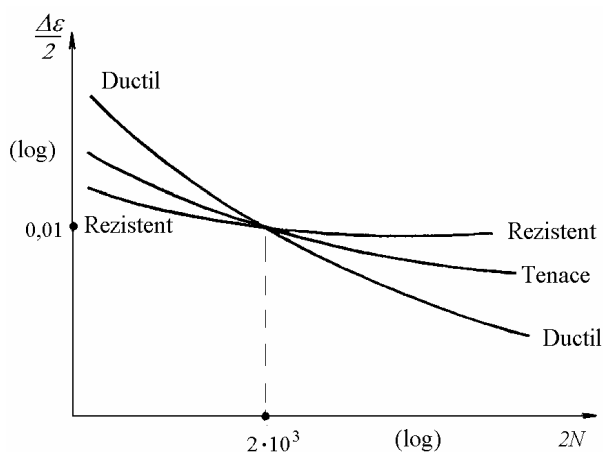


Fig. 18.37

În figura 18.37 se dau curbe tipice “deformație specifică – durabilitate” pentru trei materiale: un material cu σ_r mare (rezistent), un material ductil și un

material cu proprietăți între cele două extreme (tenace). Curbele se intersectează la circa $2 \cdot 10^3$ inversiuni (1000 cicluri), la o deformație specifică de amplitudine 0,01.

Rezultă că pentru o piesă proiectată să aibă o durabilitate mai mare de 1000 cicluri se va alege materialul “rezistent”, pentru durabilități sub 1000 cicluri se va alege un material ductil, iar în cazul unei istorii de solicitare complexe, cu spectru mai larg, se va alege ca soluție optimă un material cu proprietăți intermediare (tenace).

Date pentru diferite materiale sunt publicate în lucrările [3, 17, 19, 32]. Comportarea unor aliaje de aluminiu de înaltă rezistență și a aliajelor de titan nu poate fi reprezentată cu ajutorul unei ecuații de forma (18.44).

Exemplul 18.5

O piesă fabricată dintr-un oțel cu următoarele proprietăți ciclice $\sigma'_f = 1100$ MPa, $b = -0,1$, $\varepsilon'_f = 0,6$, $c = -0,5$, și $E = 210$ GPa, este solicitată la un ciclu alternant simetric, cu amplitudine constantă a deformațiilor specifice $\Delta\varepsilon = 0,004$. Se cere să se determine dacă ecruisarea cu jet de alică influențează comportarea la oboseală a piesei.

Rezolvare

Se calculează durata de viață de tranziție

$$2N_t = \left(\frac{E \varepsilon'_f}{\sigma'_f} \right)^{1/(b-c)} = \left(\frac{210000 \cdot 0,6}{1100} \right)^{-0,1+0,5} = 114,5^{2,5} = 140425 \text{ semicicluri.}$$

Se calculează apoi amplitudinea deformației specifice totale de tranziție, folosind relația (18.43) pentru componenta plastică

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N)^c = 0,6 \cdot 140425^{-0,5} = 0,0016.$$

Rezultă

$$\frac{\Delta\varepsilon_t}{2} = 2 \cdot 0,0016 = 0,0032.$$

Deoarece amplitudinea deformației specifice din piesă este mai mare ca valoarea corespunzătoare tranziției, $\Delta\varepsilon > \Delta\varepsilon_t$, încărcarea poate fi considerată oligociclică (la număr redus de cicluri), caz în care ecruisarea cu jet de alică nu va îmbunătăți durabilitatea la oboseală.

18.5.2 Determinarea prin calcul a proprietăților de oboseală

Mărimile care intervin în relația (18.44) sunt constante de material și se determină prin încercări la oboseală cu *controlul deformațiilor specifice*. Anumiți parametri pot fi determinați utilizând mai multe metode experimentale, valorile obținute fiind uneori diferite.

J. Morrow (1965) a stabilit următoarele relații între caracteristicile mecanice la solicitări ciclice și parametrii de oboseală

$$n' = \frac{b}{c}, \quad K' = \frac{\sigma'_f}{(\varepsilon'_f)^{n'}}. \quad (18.45)$$

La oțeluri

$$\sigma'_f \approx \sigma_f \approx \sigma_r + 345 \text{ MPa}, \quad b \approx -\frac{1}{6} \log \frac{2\sigma_f}{\sigma_r}.$$

În general, o amplitudine a deformației specifice de 1% ($\Delta\varepsilon/2 = 0,01$) corespunde unei durabilități de 1000 cicluri (sau 2000 inversiuni).

18.5.2.1 Ecuația pantelor universale

Exponenții b și c din relația (18.44), care reprezintă pantele liniilor drepte din figura 18.35, variază între limite foarte strânse la oțeluri, având valori medii $b = -0,085$ și $c = -0,6$. Rezultă $n' \cong 0,15$. Pe această bază, S. S. Manson (1965) a propus *ecuația pantelor universale*

$$\Delta\varepsilon = 3,5 \frac{\sigma_r}{E} N^{-0,12} + \varepsilon_f^{0,6} N^{-0,6}, \quad (18.46)$$

prin care procesul de oboseală depinde de trei caracteristici determinate la solicitări monotone, E , σ_r și ε_f (v. Cap. 4). Încercările la oboseală au atestat faptul că ecuația pantelor universale poate fi utilizată pentru determinarea orientativă a durabilității la cicluri alternant simetrice pentru piesele netede de dimensiuni mici.

18.5.2.2 Metoda celor patru puncte

Metoda celor patru puncte (S. S. Manson) permite construcția diagramei de durabilitate $\Delta\varepsilon - N$ a unui material pe baza caracteristicilor mecanice la încărcări monotone (fig. 18.38).

Construcția se bazează pe descompunerea deformației specifice totale în cele două componente, elastică și plastică. În coordonate logaritmice, linia deformației specifice elastice se trasează prin punctele P_1 și P_2 , iar linia

deformațiilor specifice plastice se trasează prin punctele P_3 și P_4 . Curba deformației specifice totale se obține apoi prin însumarea ordonatelor diagramelor parțiale.

Punctul P_1 are abscisa $N = 0,25$ cicluri, corespunzător duratei încercării la încărcare monotonă și ordonata $\Delta\sigma_e = 2,5\sigma_f/E$, unde σ_f este rezistența la rupere reală în încercarea la tracțiune monotonă iar E este modulul de elasticitate.

Punctul P_2 are coordonatele $N = 10^5$ cicluri și $\Delta\sigma_e = 0,9\sigma_r/E$, unde σ_r este rezistența la rupere convențională.

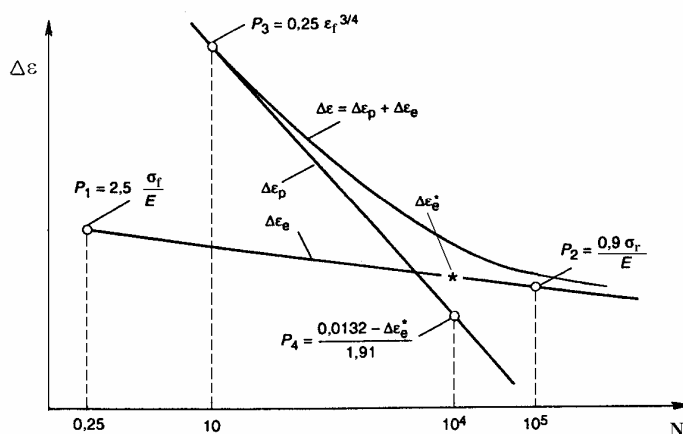


Fig. 18.38

Punctul P_3 are coordonatele $N = 10$ cicluri și $\Delta\sigma_p = 0,25\varepsilon_f^{3/4}$, unde ε_f este ductilitatea la rupere (4.16). Punctul P_4 are abscisa $N = 10^4$ cicluri și ordonata dată de expresia $\Delta\sigma_p = 0,0069 - 0,525 \cdot \Delta\varepsilon_e^*$, unde $\Delta\varepsilon_e^*$ este valoarea lui $\Delta\varepsilon_e$ calculată la 10^4 cicluri. O construcție similară se poate face în coordonate $\Delta\sigma - N$.

Exemplul 18.6

În primele trei coloane ale tabelului 18.1 se dau rezultatele încercării la solicitări ciclice de amplitudine constantă a unor epruvete netede dintr-un oțel cu $E = 210$ GPa. Se cere să se determine (1) proprietățile ciclice σ'_f , b , ε'_f , c , K' și

n' , (2) durata de tranziție și (3) durabilitatea la cicluri de amplitudine constantă a deformației specifice totale $\Delta\varepsilon/2 = 0,0075$.

Tabelul 18.1

| Amplitudinea deformației specifice totale, $\Delta\varepsilon/2$ | Amplitudinea tensiunii, $\Delta\sigma/2$, (MPa) | Numărul de semicicluri până la cedare, $2N$ | Amplitudinea deformației specifice elastice, $\Delta\varepsilon_e/2$ | Amplitudinea deformației specifice plastice, $\Delta\varepsilon_p/2$ |
|--|--|---|--|--|
| 0,00202 | 261 | 416714 | 0,0013 | 0,0007 |
| 0,00510 | 372 | 15894 | 0,0018 | 0,0033 |
| 0,0102 | 428 | 2671 | 0,0021 | 0,0081 |
| 0,0151 | 444 | 989 | 0,0023 | 0,0128 |

Rezolvare

1) Relația (18.41) se scrie

$$\log \frac{\Delta\sigma}{2} = \log \sigma'_f + b \cdot \log(2N).$$

Notând

$$y_1 = \log \frac{\Delta\sigma}{2}, \quad y_{10} = \log \sigma'_f, \quad x_1 = \log(2N),$$

rezultă ecuația unei drepte în coordonate x_1, y_1 ,

$$y_1 = y_{10} + b \cdot x_1.$$

Prin regresie liniară se obține exponentul rezistenței la oboseală

$$b = -0,0904$$

și $y_{10} = 2,9334$, deci coeficientul rezistenței la oboseală

$$\sigma'_f = 10^{2,9334} = 858 \text{ MPa}.$$

Se calculează amplitudinea deformațiilor specifice elastice

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{1}{E} \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{1}{E} \sigma'_f (2N)^b.$$

Se obțin valorile din coloana a patra a tabelului 18.1.

Amplitudinea deformațiilor specifice plastice se calculează cu relația

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \frac{\Delta \varepsilon}{2} - \frac{\Delta \varepsilon_e}{2}.$$

Rezultă valorile din coloana a cincea a tabelului 18.1.

Relația (18.43) se scrie

$$\log \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \log \varepsilon'_f + c \cdot \log(2N).$$

Notând

$$y_2 = \log \frac{\Delta \varepsilon_p}{2}, \quad y_{20} = \log \varepsilon'_f, \quad x_2 = \log(2N),$$

rezultă ecuația unei drepte în coordonate x_2, y_2 ,

$$y_2 = y_{20} + c \cdot x_2.$$

Prin regresie liniară se obține exponentul ductilității la oboseală

$$c = -0,4855$$

și $y_{20} = -0,4354$, deci coeficientul ductilității la oboseală

$$\varepsilon'_f = 10^{-0,4354} = 0,3669.$$

Relația (18.37) se scrie

$$\log \frac{\Delta \sigma}{2} = \log K' + n' \cdot \log \frac{\Delta \varepsilon_p}{2}.$$

Notând

$$y_3 = \log \frac{\Delta \sigma}{2}, \quad y_{30} = \log K', \quad x_3 = \log \frac{\Delta \varepsilon_p}{2},$$

rezultă ecuația unei drepte în coordonate x_3, y_3 ,

$$y_3 = y_{30} + n' \cdot x_3.$$

Prin regresie liniară se calculează exponentul de ecrusare ciclică

$$n' = 0,1862$$

și $y_{30} = 3,0146$, deci modulul de ecrusare ciclică

$$K' = 10^{3,0146} = 1034 \text{ MPa}.$$

Utilizând relațiile lui Morrow (18.45) se obțin aceleași valori

$$n' = \frac{b}{c} = \frac{0,0904}{0,4855} = 0,1862,$$

$$K' = \frac{\sigma'_f}{(\varepsilon'_f)^{n'}} = \frac{858}{0,3669^{0,1862}} = 1034 \text{ MPa}.$$

2) Durata de tranziție este

$$2N_t = \left(\frac{E \varepsilon'_f}{\sigma'_f} \right)^{1/(b-c)} = \left(\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,3669}{858} \right)^{\frac{1}{-0,0904+0,4855}} = 77648 \text{ semicicluri}.$$

3) Durata de viață la cicluri cu amplitunea 0,0075 a deformației specifice totale se calculează înlocuind constantele de material în relația (18.44)

$$0,0075 = \frac{858}{2 \cdot 10^5} (2N)^{-0,0904} + 0,3669 (2N)^{-0,4855}.$$

Utilizând metoda biseției se obțin

$$2N = 5644 \text{ semicicluri}.$$

18.5.3 Influența tensiunii medii

Proprietățile de oboseală ale unui material se obțin prin încercări la cicluri alternant simetrice de amplitudine constantă, cu controlul deformațiilor specifice. În practică, piesele sunt supuse la solicitări în care apar tensiuni medii și deformații specifice medii. Efectul deformațiilor specifice medii asupra durabilității unei piese este în general neglijabil. În schimb, tensiunile medii pot avea un efect determinant.

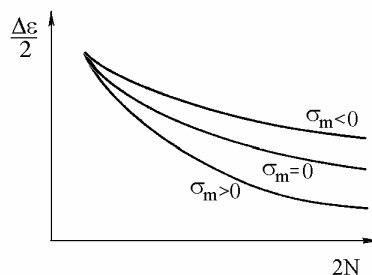


Fig. 18.39

În figura 18.39 se prezintă efectul tensiunii medii asupra curbei "deformație specifică - durabilitate". Tensiunile medii negative (de compresiune)

duc la creșterea durabilității (curba de sus), în timp ce tensiunile medii pozitive (de întindere) micșorează durabilitatea (curba de jos).

La solicitări cu deformații specifice de valori mari (0,5% la 1% și mai mari), la care deformațiile specifice plastice sunt importante, apare o relaxare a tensiunilor medii, acestea tinzând spre zero după un număr de cicluri de solicitare (fig. 18.40). De notat că aceasta nu este o înmuiere ciclică. Relaxarea tensiunilor medii poate apare în materiale stabilizate ciclic.

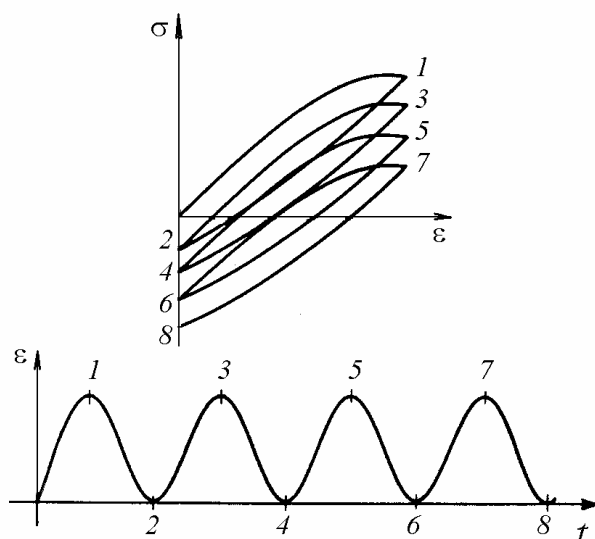


Fig. 18.40

Pentru a ține cont de influența tensiunilor medii s-au propus diferite modificări ale ecuației (18.44).

J. Morrow (1968) a propus modificarea termenului elastic al ecuației, înlocuind σ'_f prin diferența $(\sigma'_f - \sigma_m)$, unde σ_m este tensiunea medie determinată din bucla de histerezis a piesei reale

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{(\sigma'_f - \sigma_m)}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c. \quad (18.47)$$

Modificarea curbei "deformație specifică - durabilitate" în urma corecției lui Morrow este ilustrată în figura 18.41.

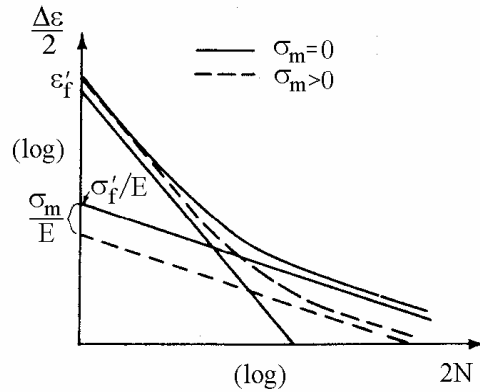


Fig. 18.41

K. N. Smith, P. Watson și T. H. Topper (1970) au propus o altă modificare, în care influența tensiunii medii este luată în considerare prin intermediul tensiunii maxime $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$.

La ciclurile alternant simetrice, conform relației (18.42)

$$\sigma_{max} = \frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f (2N)^b. \quad (18.48)$$

Înmulțind ecuația (18.44) cu acest termen, se obține

$$\sigma_{max} \frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N)^{2b} + \sigma'_f \epsilon'_f (2N)^{b+c}. \quad (18.49)$$

unde σ_{max} se calculează cu formula

$$\sigma_{max} = \frac{\Delta\sigma}{2} + \sigma_m. \quad (18.50)$$

Produsul $\sigma_{max} \frac{\Delta\epsilon}{2}$ se numește *parametrul SWT* (Smith-Watson-Topper).

Deoarece relația (18.49) are forma generală

$$\sqrt{\sigma_{max} \Delta\epsilon} \propto N,$$

ea nu admite valori σ_{max} negative. Aceasta se poate interpreta prin faptul că dacă $\sigma_{max} < 0$ atunci nu apar deteriorări prin oboseală, ceea ce nu este în general adevărat.

18.5.4 Influența concentrării tensiunilor

Pentru aplicarea metodei "deformație specifică - durabilitate", trebuie cunoscute tensiunile și deplasările specifice locale la vârful concentratorului.

În cazul încărcărilor monotone, în regim elastic, tensiunile σ și deformațiile specifice ε la vârful concentratorului sunt corelate cu tensiunile nominale S și deformațiile specifice nominale $e = S/E$ la distanță de concentrator, cu ajutorul *factorului teoretic de concentrare a tensiunilor elastice* [52]

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{S}, \quad (18.51)$$

unde σ_{max} este tensiunea locală maximă.

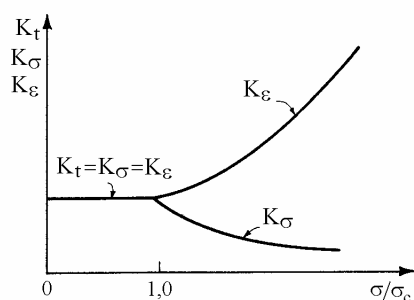


Fig. 18.42

La creșterea tensiunilor, K_t rămâne constant până la apariția curgerii. Pentru $\sigma > \sigma_c$, între tensiunile locale σ și deformațiile specifice locale ε nu mai există o relație liniară. Valorile locale nu mai sunt legate de valorile nominale prin factorul K_t ci prin alți doi factori:

factorul de concentrare a tensiunilor

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{S}, \quad (18.52, a)$$

și factorul de concentrare a deformațiilor specifice

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{e}. \quad (18.52, b)$$

După apariția curgerii, K_ε crește iar K_σ scade față de K_t (fig. 18.42). Tensiunile locale sunt mai mici decât cele calculate pe baza lui K_t , în timp ce deformațiile specifice locale sunt mai mari (fig. 18.43).

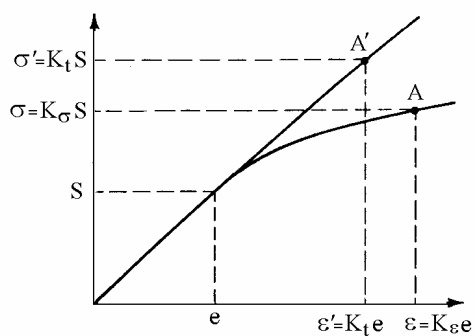


Fig. 18.43

Răspunsul la vârful concentratorului poate diferi substanțial de încărcarea nominală, datorită tensiunilor remanente care apar local datorită curgerii. Un exemplu limită este prezentat în figura 18.44.

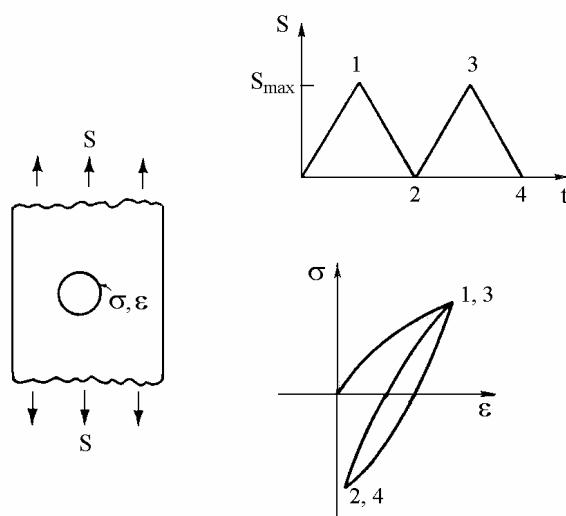


Fig. 18.44

Dacă tensiunea nominală, departe de concentrator, variază într-un ciclu pulsant, cu valori de la 0 la S_{max} , după încărcarea inițială răspunsul local este alternant simetric.

18.5.4.1 Regula lui Neuber

H. P. Neuber (1937) a stabilit că *factorul teoretic de concentrare a tensiunilor* la încărcări monotone este egal cu media geometrică a factorului de concentrare a tensiunilor și a factorului de concentrare a deformațiilor specifice [45]

$$K_t = \sqrt{K_\sigma K_\varepsilon} . \quad (18.53)$$

Înlocuind expresiile (18.52) în relația (18.53) rezultă $K_t^2 = \frac{\sigma}{S} \frac{\varepsilon}{e}$ sau

$$\sigma \varepsilon = K_t^2 S e . \quad (18.54)$$

Relația (18.54) permite exprimarea mărimilor locale în funcție de cele nominale. Deoarece departe de concentrator solicitarea este în general în domeniul elastic, această relație se mai scrie

$$\sigma \varepsilon = \frac{(K_t S)^2}{E} . \quad (18.54, a)$$

În cazul încărcărilor ciclice, s-a constatat că prezența unor concentratori reduși are un efect mai mic decât cel indicat de K_t . T. H. Topper, R. M. Wetzel și J. Morrow (1969) au propus înlocuirea lui K_t în regula lui Neuber prin *coeficientul efectiv de concentrare la oboseală* K_f , definit ca raportul între rezistența la oboseală fără concentrator și rezistența la oboseală cu concentrator, la o anumită durabilitate (de ex. 10^7 cicluri).

Relația (18.54, a) se înlocuiește cu

$$\sigma \cdot \varepsilon = \frac{(K_f S)^2}{E} . \quad (18.55)$$

La solicitări variabile, relațiile (18.52) devin

$$K_\sigma = \frac{\Delta\sigma}{\Delta S}, \quad K_\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta e}, \quad (18.56)$$

unde $\Delta\sigma$, $\Delta\varepsilon$, ΔS și Δe reprezintă variații ale mărimilor respective într-o inversiune (jumătate de ciclu).

Ecuția (18.55) devine

$$K_f = \sqrt{\frac{\Delta\sigma}{\Delta S} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta e}} . \quad (18.57)$$

Dacă tensiunile nominale sunt în domeniul elastic, atunci $\Delta S = E \Delta e$ și relația (18.55) se scrie

$$\Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon = \frac{(K_f \cdot \Delta S)^2}{E} . \quad (18.58)$$

Produsul din membrul stâng se mai poate obține înmulțind cu $\Delta \sigma$ ecuația diagramei caracteristice ciclice (18.39)

$$\Delta \sigma \Delta \varepsilon = \frac{(\Delta \sigma)^2}{E} + \Delta \sigma \cdot 2 \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{1/n'} . \quad (18.59)$$

Egalând expresiile din membrul drept al relațiilor (18.58) și (18.59) se obține ecuația

$$\frac{(\Delta \sigma)^2}{2E} + \Delta \sigma \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{1/n'} = \frac{(K_f \Delta S)^2}{2E} \quad (18.60)$$

care se poate rezolva numeric iterativ cu o metodă de tip Newton-Raphson. Apoi $\Delta \varepsilon$ se calculează din relația (18.58).

Dacă tensiunile nominale nu sunt în domeniul elastic, atunci

$$\frac{\Delta e}{2} = \frac{\Delta S}{2E} + \left(\frac{\Delta S}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

și în locul ecuației (18.60) se utilizează relația

$$K_f^2 \frac{\Delta S}{2} \left[\frac{\Delta S}{2E} + \left(\frac{\Delta S}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right] = \frac{\Delta \sigma}{2} \left[\frac{\Delta \sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right]$$

în care K_f și ΔS se calculează pe baza secțiunii nete. Relația de mai sus este aplicabilă numai în cazul încărcării cu cicluri alternant simetrice. Pentru alte cazuri de solicitare se utilizează procedura expusă în continuare.

18.5.4.2 Construcția curbei răspunsului în diagrama $\sigma - \varepsilon$

La aplicarea regulii lui Neuber, se face distincție între încărcarea inițială și răspunsul ciclic ulterior.

Dacă o epruvetă (nesolicitată anterior) este încărcată în domeniul elastic de la zero la o tensiune nominală S_1 (fig. 18.45, a), în relația (18.55) se cunoaște membrul drept, dacă K_f este cunoscut, deci se obține $\sigma \varepsilon = C_1$, ecuația *hiperbolei lui Neuber*.

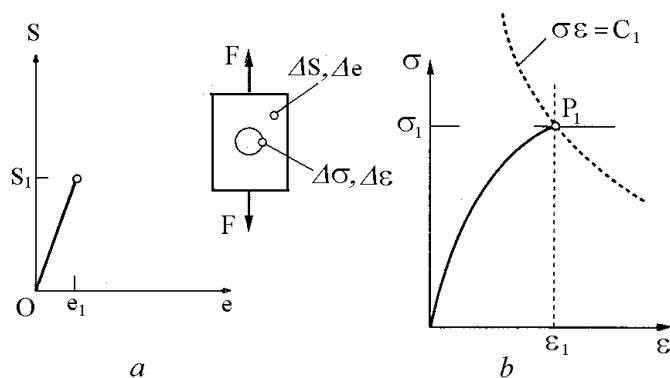


Fig. 18.45

Intersectând diagrama caracteristică ciclică cu hiperbola lui Neuber, se obține punctul P_1 care definește starea materialului (fig. 18.45, b). Coordonatele acestui punct se obțin combinând relațiile (18.39) și (18.55)

$$\left[\frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right] \sigma = \frac{(K_f S)^2}{E} \quad (18.61)$$

unde $\sigma = \sigma_1$. Din relația (18.55)

$$\sigma_1 \cdot \epsilon_1 = \frac{(K_f S_1)^2}{E}$$

se calculează apoi ϵ_1 .

Dacă tensiunea nominală devine $S_2 = -S_1$ (fig. 18.46), ceea ce reprezintă începutul unui ciclu alternant simetric cu $\Delta S = S_1 - S_2$, tensiunile și deformațiile specifice locale la vârful concentratorului variază cu $\Delta \sigma$, respectiv $\Delta \epsilon$.

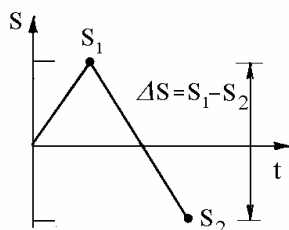


Fig. 18.46

Pentru determinarea acestor valori se repetă procedeul de mai sus, cu două modificări. Originea noului sistem de axe se află în punctul P_1 . În locul ecuației diagramei caracteristice ciclice se utilizează ecuația buclei de histerezis, obținută din precedenta utilizând ipoteza lui Massing.

Valorile $\Delta\sigma$, $\Delta\varepsilon$ satisfac ecuația dedusă din regula lui Neuber (18.58), în care membrul drept este constant și cunoscut, dar diferit de constanta din ecuația (18.61).

Se trasează o nouă hiperbolă de ecuație $\Delta\sigma \Delta\varepsilon = C_2$ (fig. 18.47) care se intersectează în punctul P_2 cu curba de histerezis (18.40)

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

care se trasează cu originea în punctul P_1 . Variația tensiunii locale se obține din relația (18.60) prin metode numerice iterative.

Coordonatele punctului P_2 se obțin scăzând $\Delta\sigma$ și $\Delta\varepsilon$ din σ_1 și ε_1 , coordonatele punctului P_1 . Punctele următoare se obțin asemănător, utilizând relațiile (18.40) și (18.60), mutând originea axelor în ultimul punct determinat.

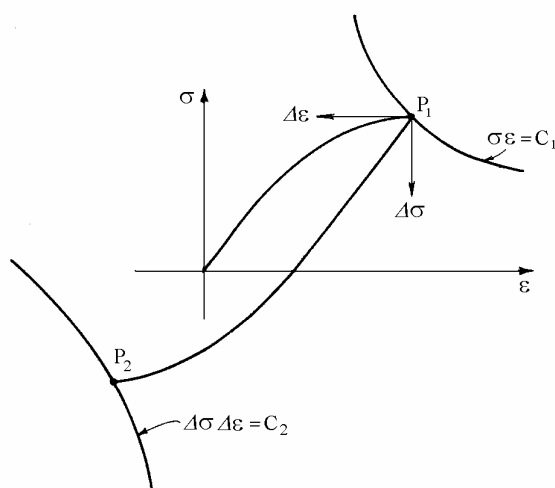


Fig. 18.47

Metoda "deformație specifică - durabilitate" este mai complicată decât metoda "tensiune - durabilitate", oferind în schimb o descriere a fenomenului fizic.

Deși necesită mai multe constante de material precum și utilizarea unei metode iterative de calcul, deci a calculatorului, metoda $\varepsilon - N$ permite urmărirea variației tensiunilor și deformațiilor specifice locale. Prin aceasta se poate ține cont de efectul de secvență al solicitărilor, fiind ușor aplicată solicitărilor cu cicluri de amplitudine variabilă.

18.5.5 Acumularea deteriorărilor prin oboseală

Fiecare ciclu de solicitare produce o anumită *deteriorare* în material. Prin acumularea acestora, se ajunge la un moment dat la o cantitate critică la care se produce cedarea.

Prin termenul de *deteriorare* se caracterizează global fenomene micro- și macroscopice de natură diferită. În *stadiul inițial* al fenomenului de oboseală, deteriorarea se manifestă prin formarea de microcavități și microfisuri izolate, care duc la relaxarea zonelor de puternică incompatibilitate a deformațiilor, situate în primul rând la marginile grăunților, în regiunile de concentrare a lunecărilor și în cele de defecte structurale (cu impurități sau porozități inițiale). În *stadiile ulterioare*, prin deteriorare se înțelege multiplicarea și coalescența fisurilor, urmate de propagarea fisurilor macroscopice.

În faza de *inițiere* a fisurii, la solicitări cu amplitudine constantă, se consideră că fiecare ciclu contribuie în mod egal la deteriorarea care progresează până în momentul cedării. Dacă la un anumit nivel de solicitare durabilitatea este de N cicluri, atunci n cicluri vor produce o deteriorare

$$D = \frac{n}{N}, \quad (18.62)$$

unde n/N se numește *raportul ciclurilor*.

Ruperea prin oboseală sau cedarea se produce atunci când $n = N$, deci când $D = 1$.

În cazul solicitărilor prin cicluri de amplitudini diferite, A. Palmgren (1924) și M. A. Miner (1945) au propus un *criteriu de acumulare liniară a deteriorărilor*.

Dacă solicitarea variabilă se descompune în grupuri de sinusoid de amplitudine constantă, atunci se consideră că: 1) fiecare grup de sinusoid produce o deteriorare dată de raportul ciclurilor corespunzător grupului; 2) deteriorarea produsă de fiecare ciclu nu depinde de poziția ciclului în secvența de solicitare; și 3) deteriorarea totală este egală cu suma deteriorărilor produse de fiecare grup de sinusoid.

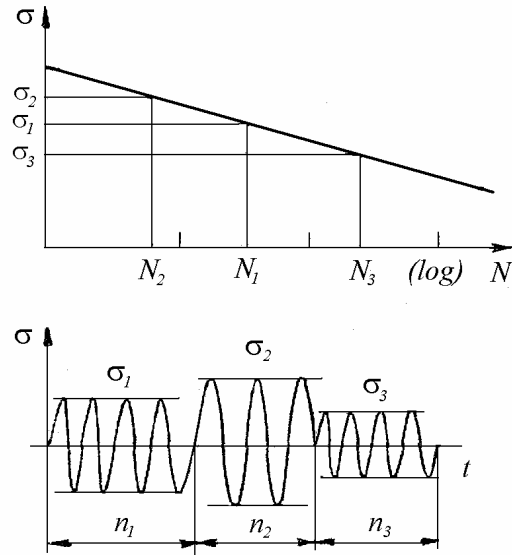


Fig. 18.48

Criteriul Palmgren-Miner neglijează *efectul secvenței* solicitărilor (un ciclu de o anumită amplitudine produce totdeauna aceeași deteriorare, independent de amplitudinea ciclurilor care îl preced) și admite o *acumulare liniară*, deteriorarea fiind proporțională cu *raportul ciclurilor* n/N .

În practică, o solicitare cu amplitudini variabile se descompune în *blocuri de solicitare*, care se repetă în timp, fiecare bloc constând din mai multe *grupuri de solicitare* la amplitudine constantă.

În figura 18.48 s-a considerat un bloc de solicitare format din 3 grupuri de sinusoidale de *nivele de solicitare* (amplitudini) diferite. Dacă \bar{n}_i este numărul de cicluri la nivelul σ_i , căruia îi corespunde o durabilitate N_i , atunci fiecare grup de solicitare produce o deteriorare $D_i = \bar{n}_i/N_i$, deteriorarea produsă de blocul de trei grupuri sinusoidale distincte este

$$D_B = \sum_{i=1}^3 D_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{n}_i}{N_i} = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3}.$$

Dacă secvența de solicitare conține n_B blocuri, deteriorarea totală este

$$D = n_B D_B = n_B \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{n}_i}{N_i}.$$

Deteriorarea la rupere este egală cu unitatea. Dacă $n_i = n_B \cdot \bar{n}_i$, rezultă că o piesă cedează atunci când

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i} \geq 1. \quad (18.63)$$

La oțelurile care prezintă limită de oboseală nu se iau în considerare ciclurile cu amplitudine sub această valoare.

Ecuția (18.63) exprimă analitic *criteriul Palmgren-Miner*. Ea este folosită în proiectare, deși în majoritatea experiențelor suma respectivă s-a dovedit a fi diferită de unitate, având în general valori cuprinse între 0,6 și 2, în unele cazuri chiar între 0,3 și 3. S-a observat totuși că secvențe de solicitare cu distribuție aleatoare a amplitudinii ciclurilor conduc la valori apropiate de unitate.

Pentru aplicarea relației (18.63) în cazul solicitărilor de amplitudine variabilă, este necesară o metodă de echivalare a acestora cu grupuri de solicitări sinusoidale de amplitudine constantă, deci cu o *metodă de numărare a ciclurilor*.

Numărarea ciclurilor se face cu *metoda "rain flow"* numită și *metoda picăturii* (M. Matsuiski și T. Endo - 1968) sau cu *metoda variațiilor perechi*, prezentate în lucrări de specialitate [17, 56].

18.5.6 Echivalarea ciclurilor cu bucle de histerezis

Combinând relațiile (18.44) și (18.58) cu o metodă adecvată de numărare a ciclurilor, care consideră bucle de histerezis închise, se poate face o predicție a timpului consumat pentru inițierea fisurilor în piese reale, solicitate la cicluri de amplitudine variabilă, pe baza criteriului de cedare acceptat.

În continuare, echivalența între o solicitare descrisă prin succesiunea valorilor tensiunii sau deformației specifice în punctele de inversiune și diagrama $\sigma - \varepsilon$ este ilustrată în figura 18.49.

Punctul de pornire este 2, corespunzător încărcării minime. Solicitării descrise de segmentul 2-3 îi corespunde arcul 2-3 pe bucla mare de histerezis. În punctul 3 apare o inversiune, solicitarea 3-4 se face în sens contrar. Descărcarea este elastică și are loc de-a lungul segmentului 3-4 din diagrama $\sigma - \varepsilon$.

Reîncărcarea 4-5 se face pe traseul 4-3 după care continuă pe bucla de histerezis până în 5. Se poate interpreta că materialul are o *memorie* a punctului descărcării precedente 3. Reintrat pe parcursul 2-5 în punctul 3, el îl continuă. Răspunsul ulterior este același ca și cum n-ar fi existat nici o descărcare. În punctul 3 are loc un salt brusc de pantă, de care trebuie ținut cont.

Descărcării 5-6 îi corespunde arcul 5-6 pe bucla mare de histerezis, iar încărcării 6-7 - linia 6-7 de încărcare elastică (bucla redusă la o linie dreaptă). Descărcarea 7-8 se face parțial pe linia elastică 7-6 în diagrama $\sigma - \varepsilon$, apoi pe bucla de histerezis de la 6 la 8.

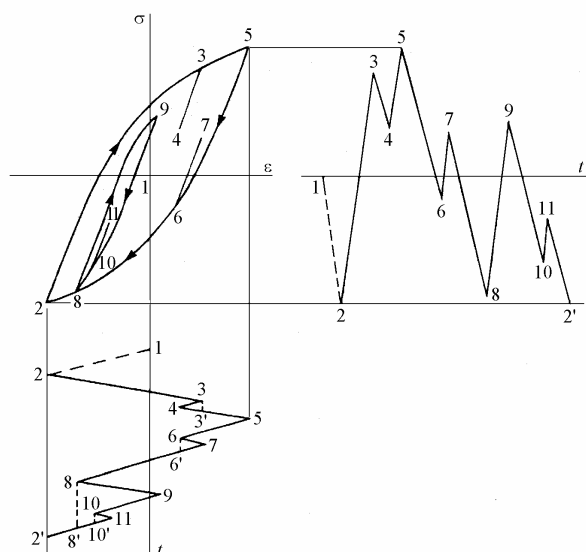


Fig. 18.49

Reîncărcarea 8-9 și descărcarea 9-10 au ca efect descrierea buclei mici pe traseul 8-9-10, întrerupt de încărcarea 10-11 și descărcarea 11-2 care produce linia elastică 10-11, revenirea în 10 pe bucla mică de la 10 la 8, apoi continuarea pe traseul 8-2 cu care se închide bucla mare 2-5-2.

Tot parcursul din diagrama $\sigma - \varepsilon$ poate fi descris analitic mutând originea axelor în punctele de inversiune și utilizând ecuația buclei de histerezis.

O contabilizare a salturilor de la o curbă la alta, la închiderea unei bucle de histerezis, se face cu ajutorul *matricei disponibilităților* (R. M. Wetzel - 1974), foarte utilă la numărarea ciclurilor. Utilizarea ei depășește cadrul acestui curs.

Numărarea efectivă a ciclurilor nu se face ca mai sus, ci cu *metoda "rain flow"* conform standardului *ASTM E 1049-85*.

18.5.7 Estimarea durabilității la oboseală

Pentru estimarea duratei de viață a unei piese, se cunosc secvența de solicitare (valorile de inversiune ale deformațiilor specifice nominale), diagrama

caracteristică ciclică și ecuația Coffin-Manson. Se trasează buclele de histerezis. Dacă piesa are concentratori, pentru fiecare buclă, valorile nominale se transformă în valori locale utilizând hiperbola lui Neuber. Prin numărarea ciclurilor se stabilește apoi numărul inversiunilor la fiecare nivel al amplitudinii deformației specifice. Din ecuația Coffin-Manson, se calculează durabilitatea (numărul de inversiuni) la fiecare nivel de solicitare.

Deteriorarea produsă de o inversiune se poate obține direct din ecuațiile (18.42) și (18.43)

$$\frac{1}{2N} = \left(\frac{\sigma'_f}{E \varepsilon'_f} \frac{\Delta \varepsilon_p}{\Delta \varepsilon_e} \right)^{\frac{1}{b-c}}. \quad (18.64)$$

Dacă tensiunea medie este diferită de zero, se aplică una din corecțiile Morrow sau *SWT*.

Aplicând corecția lui Morrow, relația (18.64) devine

$$\frac{1}{2N} = \left(\frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E \varepsilon'_f} \frac{\Delta \varepsilon_p}{\Delta \varepsilon_e} \right)^{\frac{1}{b-c}}. \quad (18.65)$$

Cu ajutorul criteriului Palmgren-Miner se calculează deteriorarea produsă de un bloc de solicitare. Durata de viață se estimează prin numărul blocurilor de solicitare până la rupere, egal cu inversul deteriorării produse de un bloc.

Exemplul 18.7

Un arbore cu concentrator, având diametrul $d = 10$ mm în dreptul concentratorului, este solicitat de un moment încovoietor alternant simetric $M = 50$ Nm. Materialul este oțel *SAE 1045* îmbunătățit, cu duritatea *HB225*. Se cere estimarea duratei de viață a arborelui. Se dau constantele de material $\sigma_c = 634$ MPa, $E = 209$ GPa, $K' = 1344$ MPa, $n' = 0,18$, $\sigma'_f = 1227$ MPa, $b = -0,10$, $\varepsilon'_f = 1$, $c = -0,66$ și coeficienții de concentrare a tensiunilor $K_t = 2,5$ și $K_f = 2,02$ [19].

Rezolvare

Tensiunea nominală de încovoiere este

$$S_a = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 50}{\pi \cdot 0,01^3} = 509 \text{ MPa}.$$

Notând $\varepsilon_a = \Delta \varepsilon / 2$, $\sigma_a = \Delta \sigma / 2$, relația (18.59) se aduce la forma adecvată pentru o soluție iterativă

$$\varepsilon_a = \frac{(K_f S_a)^2}{K' E} \left[\varepsilon_a - \frac{(K_f S_a)^2}{E^2 \varepsilon_a} \right]^{-n'}$$

Înlocuind valorile numerice cunoscute și alegând ca valoare de pornire în membrul drept $\varepsilon_a = 0,01$ după cinci iterații se obține

$$\varepsilon_a = 0,009275 .$$

Relația (18.44) se scrie sub forma adecvată pentru o soluție iterativă

$$2N = (\varepsilon'_f)^{-\frac{1}{c}} \left[\varepsilon_a - \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b \right]^{\frac{1}{c}}$$

Înlocuind valorile numerice cunoscute și începând calculul iterativ cu valoarea $2N = 2000$ în membrul drept, după trei iterații se obține

$$2N = 2043 \text{ inversiuni.}$$

Rezultă durata de viață a arborelui

$$N = 1022 \text{ cicluri.}$$

18.6 Calculul la oboseală prin analiza propagării fisurilor

Calculul durabilității la oboseală bazat pe *Mecanica ruperii*, deci prin analiza propagării fisurilor sub acțiunea sarcinilor ciclice, pornește de la eliminarea ipotezei continuității materialului, care stă la baza metodelor $\sigma - N$ și $\varepsilon - N$. Se admite existența unor discontinuități inițiale de tip fisură, care se extind sub acțiunea solicitărilor ciclice și a factorilor de mediu. Ele pot fi detectate la inspecții periodice în timpul exploatării piesei respective, vizual sau prin metode nedistructive. Cunoscând viteza de propagare a fisurilor și parametrii care o determină, se poate evalua acumularea în timp a deteriorării prin oboseală, deci durata de viață a piesei sau structurii respective.

18.6.1 Mecanica ruperii la încărcări monotone

Metalele ductile, cum sunt oțelurile, se rup uneori la tensiuni de valori neașteptat de mici. Deoarece în secțiunea de rupere se constată deformații plastice foarte mici, fenomenul se numește *rupere fragilă*. Explicația constă în faptul că orice piesă conține fisuri care în anumite condiții se propagă brusc. Remediu ar consta în eliminarea fisurilor, ceea ce se dovedește a fi dificil de realizat. Rămâne ca existența fisurilor să fie acceptată și să se poată prezice dacă și în ce condiții o

fisură de formă și dimensiuni date, se extinde când piesa este încărcată cu o sarcină constantă.

Un calcul al tensiunilor la vârful fisurii ar fi util, dar din calcule bazate pe teoria clasică a elasticității rezultă că dacă fisura are un vârf ascuțit, atunci orice încărcare produce local tensiuni de valori infinite, deci s-ar părea că piesele fisurate nu au capacitate portantă și se rup la orice încărcare.

A. A. Griffith (1920) a arătat că pentru ca o fisură să se propage, câmpul de tensiuni trebuie să elibereze o anumită energie de deformație. Dacă variația energiei de deformație elastică datorită extinderii fisurii este mai mare decât energia necesară pentru a mări suprafața fisurii, atunci fisura se propagă. Se apreciază însă că cea mai mare parte a acestei energii este consumată pentru deplasarea zonei deformată plastic de la vârful fisurii.

În aceste condiții, atenția se concentrează asupra zonei elastice din jurul vârfului fisurii. G. R. Irwin (1957) a stabilit că tensiunile locale lângă vârful fisurii au expresia generală

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (18.66)$$

unde r și θ sunt coordonatele cilindrice ale punctului în care se măsoară tensiunile față de vârful fisurii (fig. 18.50), iar K este *factorul de intensitate a tensiunii (FIT)*.

Mecanica ruperii elastice liniare (MREL) se bazează pe aplicarea teoriei elasticității la corpuri care conțin fisuri sau defecte. Forma generală a ecuațiilor din MREL este dată de ecuația (18.66).

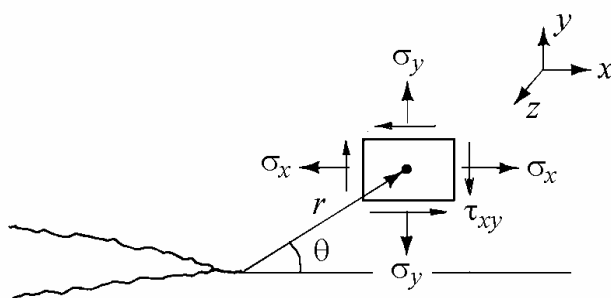


Fig. 18.50

În câmpul de tensiuni de la vârful unei fisuri apare o singularitate. Dacă distanța r până la vârful fisurii tinde la zero, valorile tensiunilor tind la infinit. Deoarece atunci când tensiunile depășesc limita de curgere materialele se

deformează plastic, lângă vârful fisurii se formează o zonă deformată plastic. Dacă această regiune plastică este mică în comparație cu dimensiunile fisurii și ale corpului fisurat, baza teoretică a MREL rămâne valabilă. În caz contrar se apelează la Mecanica Rupării Elasto-Plastice sau Mecanica Rupării Total Plastice.

Este important să se facă distincție între *factorul de intensitate a tensiunii* K și *factorul teoretic de concentrare a tensiunilor* K_t (18.51). Factorul K este un raport între două tensiuni într-un corp cu concentrator de tensiuni. Factorul K descrie modul în care tot câmpul de tensiuni de lângă vârful fisurii depinde de lungimea fisurii, de solicitare și de geometria locală. O fisură se extinde atunci când FIT atinge o valoare critică K_C , numită *tenacitatea la rupere*.

18.6.1.1 Moduri de deformare a fisurii

Se definesc trei moduri de deplasare relativă a fisurii (fig. 18.51):

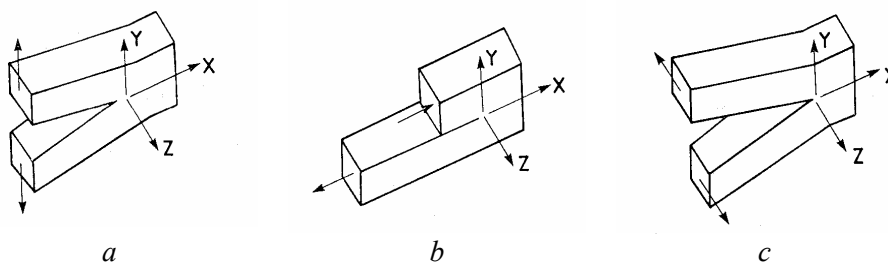


Fig. 18.51

Modul I (de deschidere) - în care fețele fisurii sunt îndepărtate una de alta prin deplasări normale pe suprafețele de rupere (fig. 18.51, a);

Modul II (de alunecare sau de forfecare în plan) - în care suprafețele fisurii alunecă una peste cealaltă în planul fisurii (fig. 18.51, b);

Modul III (de sfâșiere sau de forfecare antiplană) - în care suprafețele fisurii se mișcă una față de cealaltă paralel cu muchia de la vârf (fig. 18.51, c).

Specificarea modului de deplasare se face adăugând indicii *I*, *II* sau *III* la simbolul FIT și la tenacitatea la rupere, notând K_I , K_{II} , K_{III} , respectiv K_{IC} , K_{IIC} , K_{IIIC} .

Din punct de vedere practic, prezintă interes starea de solicitare corespunzătoare modului *I* de deplasare, acesta fiind modul predominant de încărcare în majoritatea aplicațiilor ingineresti. De asemenea există valori măsurate mai mult pentru tenacitatea la rupere K_{IC} .

18.6.1.2 Factorul de intensitate a tensiunii

Expresiile factorului de intensitate a tensiunii se scriu sub forma generală

$$K_I = Y \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (18.67)$$

în care a este lungimea fisurii, σ este tensiunea nominală, într-un punct la distanță de fisură iar Y este un factor care depinde de forma fisurii, dimensiunile piesei și poziția fisurii în piesă. Nu trebuie confundat σ cu σ_{ij} din ecuația (18.66).

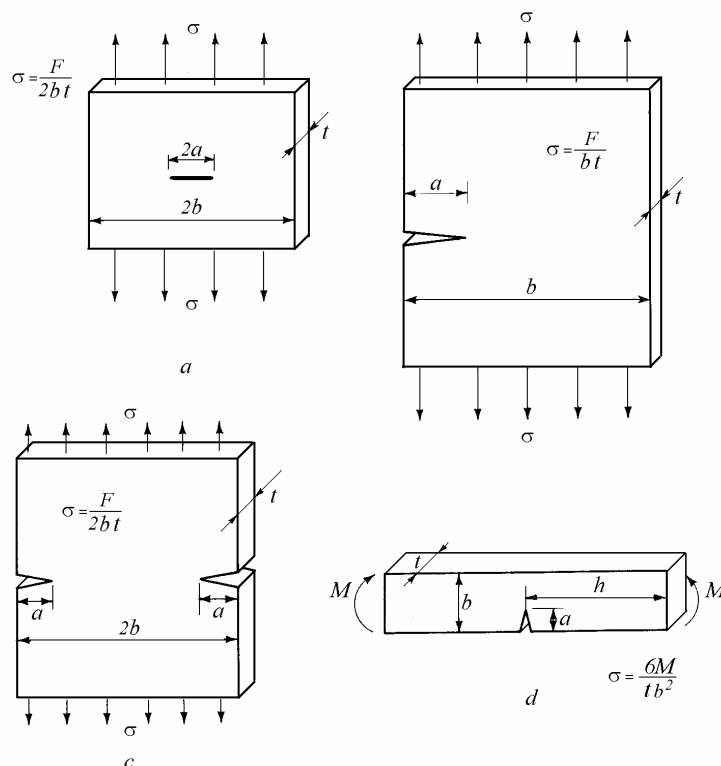


Fig. 18.52

Pentru plăci de lățime b și grosime t , au fost stabilite următoarele expresii ale factorului Y , în care $\alpha = a/b$ (H. Tada - 1985) :

a) fisură în mijlocul plăcii solicitate la întindere (fig. 18.52, a)

$$Y = \frac{1 - 0,5\alpha + 0,326\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha}}. \quad (h/b \geq 1,5) \quad (18.68)$$

b) o singură fisură laterală în placa solicitată la întindere (fig. 18.52, b)

$$Y = 0,265(1 - \alpha)^4 + \frac{0,857 + 0,265\alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}}. \quad (h/b \geq 1) \quad (18.69)$$

c) fisuri laterale simetrice în placa sollicitată la întindere (fig. 18.52, c)

$$Y = \left(1 + 0,122 \cos^4 \frac{\pi\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}}. \quad (h/b \geq 2) \quad (18.70)$$

d) fisură laterală în placa sollicitată la încovoiere (fig. 18.52, d)

$$Y = \frac{1,99 - \alpha(1 - \alpha)(2,15 - 3,93\alpha + 2,7\alpha^2)}{\sqrt{\pi(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}}}. \quad (h/b = 2) \quad (18.71)$$

Pentru $\alpha \leq 0,13$ în cazul *b*, pentru $\alpha \leq 0,6$ în cazul *c* și pentru $\alpha \leq 0,4$ în cazul *d*, se obține

$$K_I = 1,12 \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (18.72)$$

Expresii ale *FIT* pentru diferite forme și poziții ale fisurilor în piese de diferite forme sunt prezentate în publicații speciale (H.Tada, P.C.Paris și G.R.Irwin - 1973, G.C.Sih - 1973, D.P.Rooke și D.J.Cartwright - 1975).

18.6.1.3 Tenacitatea la rupere

În timp ce *FIT* este o mărime variabilă, *tenacitatea la rupere* K_C este o caracteristică mecanică a unui material. După cum la materialele ductile solcitate static, tensiunea calculată se compară cu limita de curgere σ_c (sau cu rezistența la rupere σ_r), în mecanica ruperii factorul de intensitate a tensiunii K se compară cu tenacitatea la rupere K_C . În proiectare, se alege întâi expresia *FIT* pentru tipul de fisură studiat, se calculează valoarea *FIT* pentru lungimea fisurii și încărcarea piesei, iar rezultatul se compară cu K_C .

Determinarea tenacității la rupere în condițiile stării plane de deformație se face conform *STAS 9760-84*. Tenacitatea la rupere K_{IC} se calculează pe baza forței critice înregistrate, căreia îi corespunde o extindere a fisurii pe o anumită distanță, într-o epruvetă prevăzută cu o creștătură și o fisură în prelungire, produsă prin solcități repetate. Pentru produse cu grosimi mai mari sau egale cu 10 mm, la care nu se îndeplinesc condițiile stării plane de deformații specifice, se utilizează *STAS E 12803-90*, care prevede măsurarea deplasării la deschidere a fisurii.

La metalele folosite în practica inginerescă tenacitatea la rupere are valori în domeniul 20...200 MPa \sqrt{m} . La oțeluri îmbunătățite, ea scade cu creșterea limitei de curgere. Valorile tenacității la rupere au o variație statistică mai mare decât alte proprietăți, cum ar fi de exemplu limita de curgere.

Anumite elemente de aliere și unele tratamente termice pot produce fragilizarea oțelurilor. Aceasta se manifestă prin valori mici ale tenacității la rupere, de ordinul a $40 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ la temperatura ambiantă și ductilitate scăzută la temperatura de lucru. Fenomenul se observă la oțelurile cu crom, molibden și vanadiu, rezistente la fluaj și cu limite de curgere de ordinul a 900 MPa , utilizate la rotoarele turbinelor cu abur.

Tenacitatea la rupere K_{IC} crește cu temperatura la fel ca reziliența. La oțelurile martensitice și cele feritice-perlitice, K_{IC} crește lent la temperaturi joase, apoi crește brusc într-un domeniu de temperaturi relativ îngust.

Se definește o *temperatură de tranziție* pentru un anumit procent de rupere fragilă, de exemplu 50%, denumită $FATT_{50}$. Sub temperatura de tranziție ruperea este prin clivaj, deasupra acestei temperaturi - prin coalescența microgolurilor. Normele în vigoare impun ca la rotorii turbinelor de joasă presiune din centralele nucleare, $FATT_{50}$ trebuie să fie sub -18°C , iar la rotorii turbinelor de înaltă presiune, sub $+10^\circ \text{C}$. La unele oțeluri se observă o scădere cu până la 100°C a temperaturii de tranziție, după o funcționare îndelungată la temperaturi înalte. Ruperea fragilă se evită prin încălzirea rotorilor înainte de pornire.

18.6.2 Mecanica ruperii la încărcări ciclice

O fisură poate crește la solicitări variabile până când piesa se rupe. În descrierile tradiționale se spune că o piesă fisurată este slăbită și se rupe dacă fisura crește până când tensiunile din partea nefisurată a secțiunii ating valoarea limită.

În MREL se spune că fisura crește până când următorul vârf de tensiune de întindere face ca FIT să devină egal cu sau mai mare decât K_{IC} , după care se dezvoltă catastrofal.

La solicitări variabile, factorul de intensitate a tensiunii este variabil, cu valori cuprinse între $K_{I_{min}} = Y \sigma_{min} \sqrt{\pi a}$ și $K_{I_{max}} = Y \sigma_{max} \sqrt{\pi a}$.

Coeficientul de asimetrie se definește corespunzător

$$R = \frac{K_{I_{min}}}{K_{I_{max}}} = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \quad (18.73)$$

Variația factorului de intensitate a tensiunii are expresia

$$\Delta K_I = K_{I_{max}} - K_{I_{min}} = Y \Delta \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (18.74)$$

Deoarece factorul K_I se referă la o solicitare prin deschiderea fisurii, atunci când $\sigma_{min} \leq 0$ se consideră $K_{I_{min}} = 0$.

18.6.2.1 Viteza de propagare a fisurii

Încercările de creștere a fisurii se fac pe epruvete cu caracteristici $K_I - a$ stabilite. Detalii asupra metodei sunt prezentate în standardul *ASTM E 647-95*. Rezultatul imediat al încercării este lungimea fisurii a în funcție de numărul de cicluri N pentru valori $\Delta\sigma = const.$ (fig. 18.53).

Se observă că viteza de propagare, egală cu panta curbei, crește cu creșterea tensiunii aplicate, majoritatea vieții piesei fiind consumată când fisura este relativ scurtă.

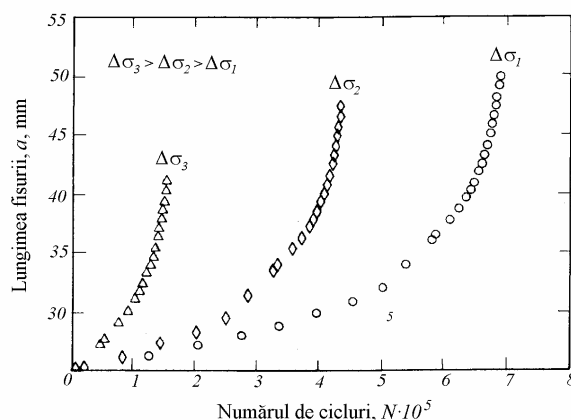


Fig. 18.53

Prin derivare numerică, în pasul următor se obțin valori da/dN în funcție de a . Folosind expresia *FIT* pentru epruveta utilizată, K_I , în funcție de sarcină și de lungimea fisurii, se obține în final curba vitezei da/dN în funcție de ΔK_I (fig. 18.54).

Graficul poate fi împărțit în trei regiuni. *Domeniul I* - la valori mici ale *FIT*, în care se definește o valoare ΔK_{th} minimă, de prag, sub care o fisură existentă nu se propagă. *Domeniul II* - în partea din mijloc, liniară, a diagramei, în care fenomenul este stabilizat, viteza de propagare fiind constantă. *Domeniul III* - la viteze de propagare mari, în care propagarea este instabilă, fisura crescând până la o lungime critică la care *FIT* devine egal cu K_{IC} , corespunzătoare ruperii finale.

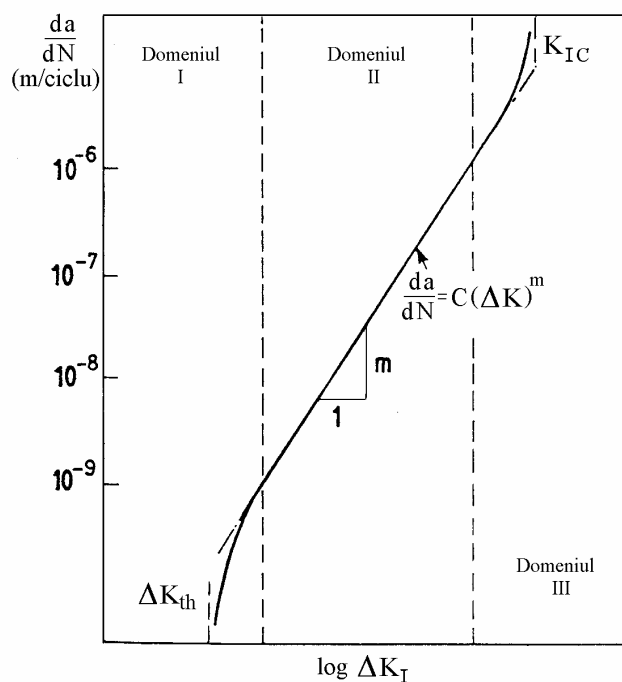


Fig. 18.54

18.6.2.2 Legi de propagare în domeniul II

Majoritatea aplicațiilor MREL sunt legate de domeniul II, în care curba de variație a vitezei de propagare a fisurii a fost aproximată prin diverse ecuații.

Cea mai utilizată este ecuația stabilită de P.C.Paris și F.Erdogan (1963)

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (18.75)$$

unde C și m sunt constante de material iar ΔK este variația *FIT*.

În cazul solicitărilor cu cicluri asimetrice, pentru a ține cont de influența tensiunilor medii, se poate utiliza ecuația lui R.G. Forman (1967), stabilită inițial pentru domeniul III, apoi extinsă și la domeniul II

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_1(\Delta K)^m}{K_{IC}(1-R) - \Delta K}, \quad (18.76)$$

unde C_1 și m sunt constante de material, iar R este coeficientul de asimetrie (18.73).

18.6.3 Limita de oboseală

În cadrul regimului MREL, *limita de oboseală* este definită de condiția de prag ΔK_{th} a variației factorului de intensitate a tensiunii la care, pentru un nivel dat al tensiunii ciclice $\Delta\sigma$, fisura nu se propagă sau la care, pentru o lungime dată a fisurii a , variația tensiunii este insuficientă pentru a produce propagarea

În acest mod, mecanica ruperii oferă explicații pentru existența unor fisuri nepropagabile observate experimental și pentru apariția de fisuri la tensiuni sub limita de oboseală.

În figura 18.55 se prezintă creșterea fisurilor scurte la diferite nivele ale tensiunii ciclice. Se observă că fisurile de oboseală încep să crească încă din primul ciclu de solicitare variabilă, dar propagarea este oprită de bariere microstructurale.

Astfel, la tensiuni ciclice $\Delta\sigma_5$, fisura de 2 μm este oprită de bariera d_5 care poate fi o frontieră dublă. La tensiuni $\Delta\sigma_4 > \Delta\sigma_5$, fisura se propagă până este oprită de bariera d_4 , care poate fi marginea unui grăunte. La $\Delta\sigma_3 > \Delta\sigma_4$, fisura este oprită, mai târziu, de bariera d_3 , care poate fi o zonă perlitică într-o microstructură de ferită-perlită. La $\Delta\sigma_2$ barierele nu mai sunt suficient de puternice pentru a stopa fisura și astfel apare propagarea până la cedare.

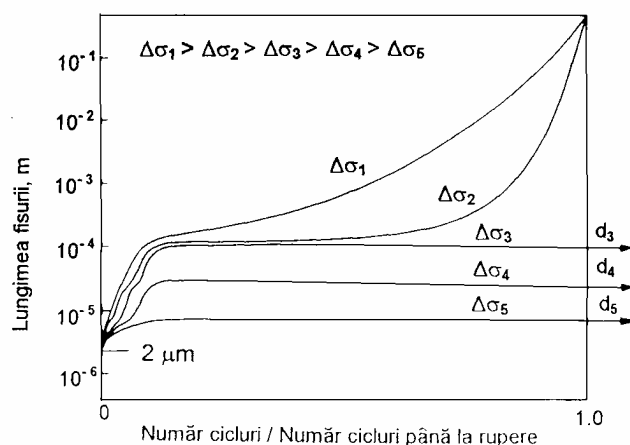


Fig. 18.55

Deci *limita de oboseală* reprezintă *nivelul tensiunilor* ciclice necesare pentru depășirea celei mai puternice bariere contra propagării, reprezentată printr-o *distanță* microstructurală. Limita de oboseală este o limită a capacității de propagare până la rupere a unei fisuri, indiferent de lungimea ei (K.J. Miller - 1985).

Pentru domeniul de valori între 10^{-6} și 10^{-1} m, nivelul tensiunii la *limita de oboseală* este definit de condiția $da/dN=0$, deci de o viteză de propagare nulă a fisurii.

În figura 18.56 se disting trei zone a căror extindere variază în funcție de material. Zona A-B definește regimul de creștere al fisurilor microstructural scurte. Barierele d_5 , d_4 , d_3 le corespund tensiunii $\Delta\sigma_5$, $\Delta\sigma_4$, $\Delta\sigma_3$ ca în figura 18.48. Pentru a mări rezistența la oboseală, deci pentru a scădea viteza de creștere a fisurilor de oboseală este necesară o scădere a dimensiunii grăunților.

Zona B-C definește regimul de creștere al fisurilor fizic scurte, care nu este afectată sensibil de dimensiunea grăunților. Zona este afectată doar de efectul descrescător al barierelor microstructurale pe măsură ce lungimea fisurii crește.

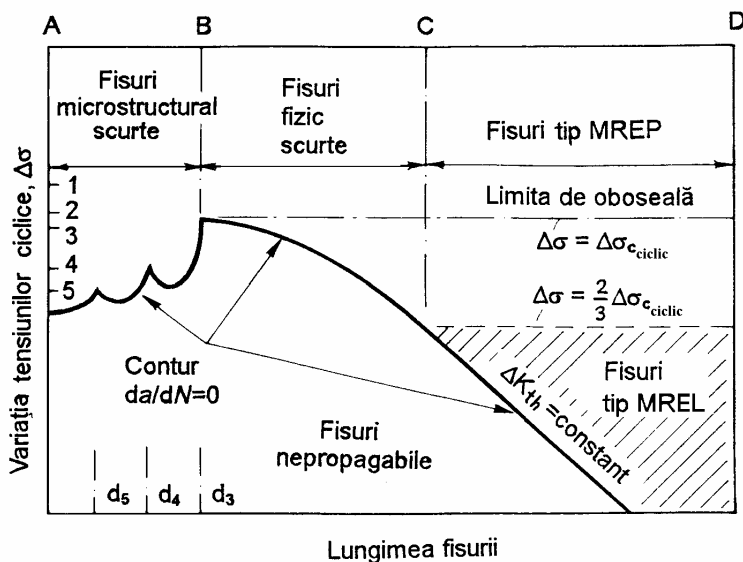


Fig. 18.56

În zona C-D, pentru calculul limitei de oboseală este aplicabilă MREL. Pentru creșterea rezistenței la oboseală, deci pentru scăderea vitezei de creștere a fisurilor, este necesară o creștere a dimensiunilor grăunților, mai ales la nivele mici ale tensiunii medii, care măresc valoarea ΔK_{th} .

18.6.4 Propagarea fisurilor de oboseală

Pentru fisurile microstructurale scurte (zona A-B din figura 18.56), viteza de fisurare se poate exprima sub forma

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta\gamma_p)^\alpha (d-a), \quad (18.77)$$

unde A și α sunt constante de material, $\Delta\gamma_p$ este variația lunecării specifice plastice (parametru legat de direcția de creștere a fisurii), d este distanța la cea mai puternică barieră iar a este lungimea fisurii. Se observă că da/dN scade cu creșterea lui a .

Pentru fisurile fizic scurte (zona B-C) expresia vitezei de fisurare este:

$$\frac{da}{dN} = B(\Delta\gamma_p)^\beta a - D, \quad (18.78)$$

unde B și β sunt constante de material, iar D este condiția de prag limită pentru fisura cea mai lungă. Se observă că da/dN crește cu creșterea lui a .

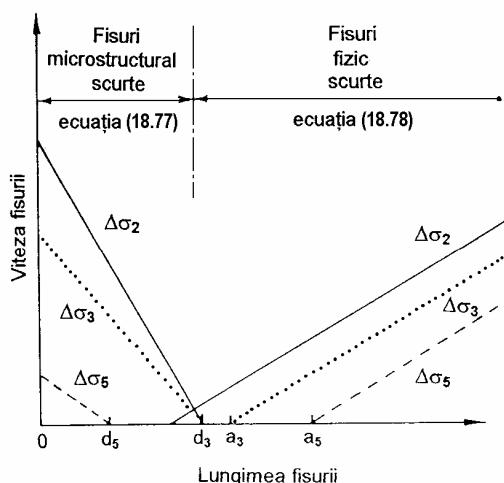


Fig. 18.57

Pentru fisuri de tip MREL, în regim de tensiuni mici și cu lungime mare, se poate aplica *relația lui Paris* (18.75).

În figura 18.57 se prezintă efectul nivelului tensiunilor ciclice și al rezistenței barierelor asupra propagării (sau nepropagării) unei fisuri de oboseală.

Pentru tensiuni mici, $\Delta\sigma_5$, o fisură microstructurală scurtă crește până se atinge limita de oboseală marcată de bariera d_5 . Ea poate continua să crească la aceeași tensiune $\Delta\sigma_5$ numai dacă este extinsă (de coroziune sau alte efecte) până la lungimea a_5 care reprezintă condiția de prag pentru fisuri fizic scurte.

Mărind nivelul tensiunilor la $\Delta\sigma_3$, rezultă o limită de oboseală datorită valorii diferite a lungimilor d_3 și a_3 . Pentru tensiuni ciclice $\Delta\sigma_2$, cele două linii care reprezintă creșterea fisurilor microstructural scurte și fizic scurte se intersectează, deci rezultă cedarea prin oboseală.

Trecerea de la deformațiile specifice din relațiile (18.77) și (18.78) la tensiuni se face utilizând curba caracteristică ciclică a materialului.

18.6.5 Calculul duratei de viață

La calculul duratei de viață pe baza diagramelor $da/dN-\Delta K$, se integrează ecuația (18.75)

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$$

între o lungime inițială a_i și una finală a_f ale fisurii. Se obține numărul de cicluri necesar pentru a crește fisura de la a_i la a_f , care reprezintă durata de viață estimată a piesei

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K)^m} \quad (18.79)$$

Aplicarea metodei întâmpină o serie de dificultăți începând cu integrarea ecuației creșterii fisurii în funcție de lungimea acesteia și cu estimarea lungimii inițiale a fisurii, chiar dacă aceasta din urmă se bazează pe o valoare prag ΔK_{th} cunoscută.

De reținut ipotezele care stau la baza acestui procedeu: 1) sarcini de amplitudine constantă; 2) stare plană de deformații specifice; 3) comportarea de "fisură lungă" tratabilă prin MREL. De asemenea, în relația (18.75) nu apare efectul tensiunii medii, al tensiunilor reziduale și al secvenței de încărcare asupra creșterii fisurii.

Următoarele considerații trebuie de asemenea avute în vedere:

a) Relația Paris-Erdogan este dedusă pentru un câmp uniform de tensiuni, în timp ce fisurile pornesc de la un concentrator și creșterea lor inițială se face printr-o zonă a piesei cu gradient de tensiune. Încă nu se cunoaște cum trebuie modificată ecuația (18.75) în acest caz.

b) Variația factorului de intensitate a tensiunii este $\Delta K = K_{max} - K_{min}$. Cea mai simplă convenție pentru K_{min} presupune că fisura se închide când sarcina trece prin zero, astfel că tensiunile de compresiune se neglijează. Experimental s-a observat că dacă $R = K_{min}/K_{max}$ devine negativ, uneori fisurile cresc mai repede

decât prezice ecuația (18.75). Rezultă că fisura nu se închide când sarcina trece prin zero, deci că o fracțiune a sarcinii de compresiune contribuie la deteriorare.

Ecuția lui Forman (18.76) este utilă pentru $R > 0$, deci se presupune că fisura este deschisă tot timpul.

c) La multe materiale, curba $da/dN-\Delta K$ nu are o pantă unică în zona stabilizată.

d) Aspectele probabilistice nu intervin în ecuația (18.75).

În cazul încărcărilor de amplitudine variabilă, se poate calcula o viteză de propagare pe un bloc de solicitare, de tipul

$$\frac{da}{dB} = n_1 \left(\frac{da}{dN} \right)_1 + n_2 \left(\frac{da}{dN} \right)_2 + n_3 \left(\frac{da}{dN} \right)_3 + \dots \quad (18.79)$$

unde n_1, n_2, n_3, \dots reprezintă numărul de cicluri de nivel S_1, S_2, S_3, \dots într-un bloc de solicitare, pe baza căreia se calculează durata de viață în blocuri (nu cicluri). Relația (18.79) nu ține cont de efectele secvențiale și se bazează pe o cumulare liniară a deteriorărilor.

Durata de creștere a fisurii, exprimată în cicluri de solicitare până la rupere, se poate calcula pe baza relației (18.79). Deoarece ΔK este funcție de lungimea fisurii atât direct cât și prin factorul de corecție Y , integrala (18.79) trebuie rezolvată numeric. Totuși, o soluție închisă aproximativă se poate obține calculând valoarea lui Y pentru lungimea inițială a fisurii.

De exemplu, pentru o placă de dimensiuni mari, având o mică fisură laterală (Fig. 18.52, d), la care $Y = 1,12$ în relația (18.72),

$$\Delta K = 1,12 \cdot \Delta \sigma \sqrt{\pi a} .$$

Înlocuind ΔK în (18.75) rezultă

$$\frac{da}{dN} = C (1,12 \cdot \Delta \sigma \sqrt{\pi a})^m .$$

Separând variabilele și integrând (pentru $m \neq 2$) se obține

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C (1,12 \cdot \Delta \sigma \sqrt{\pi a})^m} = \\ = \frac{2}{(m-2) C (1,12 \cdot \Delta \sigma \sqrt{\pi})^m} \left[\frac{1}{a_i^{(m-2)/2}} - \frac{1}{a_f^{(m-2)/2}} \right] .$$

Pentru rezolvarea integralei de mai sus, trebuie determinată întâi lungimea finală a fisurii. Din ecuația (18.72) se obține

$$a_f = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_C}{1,12 \sigma_{max}} \right)^2.$$

Din figura 18.53 rezultă că variații mari ale lui a_f determină variații mici ale lui N , deci durabilitatea la oboseală este mai puțin influențată de a_f și mai mult de a_i .

O altă metodă aproximativă pentru estimarea creșterii fisurilor de oboseală se poate utiliza în cazul încărcărilor de amplitudine constantă (A. P. Parker, 1981). Se parcurg următoarele etape de calcul:

- 1) Creșterea lungimii fisurii de la a_i la a_f se împarte în $n-1$ intervale.
- 2) Se calculează factorul Y în ecuația (18.67) pentru a_i , a_f , și pentru fiecare lungime intermediară.
- 3) Pentru fiecare lungime a_n a fisurii se calculează ΔK_n .
- 4) Pentru fiecare ΔK_n de determină $(da/dN)_n$ din diagramele de creștere a fisurii (18.53) sau din ecuația (18.67)

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_n = C (\Delta K_n)^m.$$

- 5) Se calculează viteza medie de creștere între două lungimi consecutive ale fisurii

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{medie} = \frac{(da/dN)_n + (da/dN)_{n+1}}{2}.$$

- 6) Se calculează numărul de cicluri care produce creșterea fisurii de la a_n la a_{n+1}

$$\Delta N = \frac{\Delta a}{\left(\frac{da}{dN} \right)_{medie}} = \frac{2(a_{n+1} - a_n)}{\left(\frac{da}{dN} \right)_n - \left(\frac{da}{dN} \right)_{n+1}}.$$

- 7) Se însumează valorile ΔN obținute pentru toate intervalele de variație a lungimii fisurii.

În general, tenacitatea la rupere nu este un factor determinant în durabilitatea la oboseală, deoarece numărul de cicluri de solicitare până la rupere, N , nu variază sensibil cu lungimea finală a fisurii. Excepție fac materialele foarte dure solicitate la tensiuni mari. Astfel, durabilitatea la oboseală a roților dințate depinde de tenacitatea la rupere a materialului deoarece dimensiunea finală a fisurii nu diferă mult de dimensiunea inițială a acesteia.

18.6.6 Metoda tolerării defectelor

Metoda propagării fisurilor este utilizată în industria aeronautică la determinarea intervalelor dintre inspecții planificate, pentru a asigura integritatea structurală a avioanelor.

Metodologiile de calcul la oboseală al structurilor aeronautice au avut o evoluție rapidă. După mai multe ruperi prin oboseală, printre care cele mai cunoscute au fost cele ale avioanelor *De Havilland Comet* (1954), s-a adoptat metoda *fiabilității*, cunoscută ca *metoda durabilității garantate* ("safe-life"), care impunea analiza și încercarea la de 4 ori durata de serviciu anticipată.

La începutul anilor 1960 s-a introdus *metoda deteriorării controlate* ("fail-safe"), în care cedarea totală era evitată prin distribuirea fluxului de forțe simultan pe mai multe trasee și folosirea "opritoarelor" de fisuri.

Curând s-a dovedit că aceste metode nu pot preveni apariția fisurilor de oboseală în timpul duratei de serviciu, deși avioanele erau încercate la 4 durate de viață. Fisurări prin oboseală la avioanele *KC-135* și *F-5*, ca și pierderea avioanelor *B-52* și *T-38* au arătat limitele metodelor "safe-life". Accidentul avionului *F-111* (1969), garantat la 4000 ore, produs de un defect în piesa de fixare a părții centrale a aripii, din oțel *D6AC*, care s-a propagat până la o dimensiune critică în numai 105 ore de serviciu, a determinat o serie de cercetări care s-au finalizat în 1974 prin modificarea criteriilor de proiectare și verificare a integrității avioanelor prin utilizarea mecanicii ruperii, sub denumirea de *metoda tolerării defectelor*.

Accidente avioanelor *Hawker Siddeley 748* (Argentina, 1976) și *Boeing 707* (Zambia, 1977) proiectate pe principiul "fail-safe" au arătat importanța inspecțiilor, respectiv rolul defectelor nedetectate în estimarea duratei de viață a avioanelor. În 1978 a fost emis documentul *FAR-25.571* care a introdus metoda tolerării defectelor la avioanele de transport comerciale. Aplicată inițial avioanelor *B-1A* și *C-5A*, metoda a dus la elaborarea standardului *MIL-A-87221*, care descrie cerințele impuse de siguranța în zbor a avioanelor militare.

În prezent, metoda propagării fisurilor este utilizată în industria aeronautică la determinarea intervalelor dintre inspecții planificate, pentru a asigura integritatea structurală a avioanelor.

18.6.7 Observații generale

Oboseala este modul predominant de pierdere a integrității structurale, important atât ca frecvență de apariție cât și ca factor decisiv în determinarea tensiunilor admisibile în piese solicitate la încărcări ciclice.

Cu toate progresele recente în studiul propagării fisurilor, predicția duratei de viață la oboseală se face cu erori între $\pm 200\%$ și $\pm 300\%$, chiar atunci când se dispune de date certe asupra proprietăților materialelor. Cauzele principale sunt

variabilitatea proceselor de fabricație, cunoașterea aproximativă a istoriei de sollicitare și insuficiența cunoștințelor actuale despre oboseală și rupere.

În condițiile în care o estimare absolută a durabilității la oboseală este incertă, metodele de calcul și proiectare la oboseală se folosesc pentru estimări relative. Astfel, ele sunt utilizate la comparația a două sau mai multe materiale pentru realizarea aceleiași piese sau la comparația mai multor soluții constructive pentru o anumită piesă sau structură din același material.

Aceasta se datorește faptului că metodele actuale de calcul la oboseală nu se bazează pe legi fizice sau principii fundamentale, ci pe aproximarea prin anumite curbe a datelor obținute din încercări la oboseală. S-a dovedit că principiul similitudinii, utilizat implicit în mecanica ruperii, nu este general valabil. În piese de dimensiuni diferite fisurate, supuse la aceeași valoare a variației FIT, ΔK , viteza de creștere a fisurii, da/dN , nu este aceeași, depinzând de dimensiunile fisurii și de istoria sollicitării.

Uneori fisurile scurte, de câțiva milimetri, au viteze de creștere semnificativ mai mari decât fisurile lungi, cu lungimi de zeci de milimetri, când sunt supuse la valori ΔK identice. Există fisuri de dimensiuni comparabile cu distanțele microstructurale a căror viteză de creștere scade cu creșterea lungimii fisurii. Aceste fenomene nu pot fi analizate satisfăcător cu ajutorul teoriilor actuale ale mecanicii ruperii. De aici - problema fisurilor scurte.

Înțelegerea mecanismelor microscopice ale deteriorărilor prin oboseală, îndeosebi comportarea fisurilor scurte, va permite studiul factorilor care influențează limita de oboseală și durata de viață la oboseală. Aceștia sunt mediul coroziv, fretajul, tratamentele superficiale, granulația materialului, nivelul tensiunii medii, stările de tensiune multiaxiale, încărcările cu sarcini aleatoare, precum și acțiunea lor combinată.

Este necesară o unificare a modurilor de definire a celor două stadii: inițierea și propagarea fisurii precum și o delimitare clară a acestora. Inginerii apreciază că în stadiul de inițiere există trei faze: a) nucleația microdefectelor, b) formarea fisurilor microscopice, c) creșterea și coalescența defectelor microscopice până la formarea unor macrofisuri "dominante". Specialiștii în știința materialelor limitează stadiul de inițiere numai la prima fază. Studiul fisurilor scurte permite condiționarea deteriorării la oboseală de lungimea, forma, orientarea, viteza de propagare, coalescența și interferența fisurilor.

19.

FLUAJUL METALELOR

În capitolele precedente s-a neglijat influența temperaturii și a duratei încărcării asupra comportării mecanice a materialelor. În general, rezistența mecanică a materialelor scade cu creșterea temperaturii iar caracteristicile mecanice devin dependente de timp.

Proprietățile materialelor vâscoelastice depind de viteza de deformare chiar la temperaturi ambiante normale. La aliaje metalice, dependența de timp a caracteristicilor mecanice se observă mai ales la temperaturi relativ ridicate. Supuse la încărcări constante și la temperaturi înalte, metalele se deformează în timp, fenomen cunoscut sub numele de *fluaj*.

În acest context, temperaturile sunt “joase” sau “înalte” în comparație cu temperatura absolută de topire T_t . La majoritatea metalelor fluajul apare la temperaturi peste $0,3 T_t$. La ceramice, fluajul apare peste $0,4 T_t$. La plumb fluajul devine important la $270^{\circ}C$, ceea ce în trecut a produs turtirea și îndoirea țevilor de scurgere ale instalațiilor sanitare și deformarea plăcilor din acumulatele electrice. Filamentele din tungsten ale becurilor electrice, la care fluajul apare peste $1500^{\circ}C$, se deformează sub acțiunea greutatei proprii și au o durată de viață de circa 1000 ore la temperatura de funcționare de $2000^{\circ}C$. Fluajul apare în diverse aplicații industriale, la turbine cu gaze și cu abur, la țevile supraîncălzitoarelor cazanelor cu abur, la reactoare nucleare, cuptoare, motoare cu reacție etc.

Fluajul este o deformație inelastică în timp, la tensiuni constante, inferioare limitei de curgere a materialului. Un fenomen complementar este *relaxarea tensiunilor*, deci micșorarea acestora, la deformații specifice constante.

Studiul fluajului s-a dezvoltat în legătură cu materialele din componente care lucrează la temperaturi înalte, interesând cât va rezista un material în serviciu, cum reduce funcționarea la temperaturi înalte durabilitatea și, mai ales, ce modificări se pot face în proiectarea materialului pentru a obține durabilitatea dorită.

S-a observat o interacțiune fluaj-oboeseală, interesând cum influențează mecanismele fluajului durabilitatea la oboseală și în ce condiții fluajul sau oboseala reprezintă mecanismul predominant de deteriorare.

Pentru a răspunde acestor întrebări este necesară o corelare a proprietăților mecanice macroscopice cu mecanismele de deteriorare la scară microstructurală.

19.1 Deformația izotermă sub sarcină constantă

Abordarea tehnică a fenomenelor de fluaj se bazează pe încercări la tracțiune pe epruvete încălzite și menținute la temperaturi înalte într-un cuptor. Rezultatele se prezintă sub formă de *curbe de fluaj*.

19.1.1 Curba de fluaj

Curba de fluaj reprezintă grafic alungirea specifică la fluaj în funcție de timp (fig. 19.1), pentru o epruvetă încălzită și menținută la o temperatură ridicată și supusă la o anumită forță de întindere. Menținerea unei tensiuni constante în timpul încercării este mai dificilă.

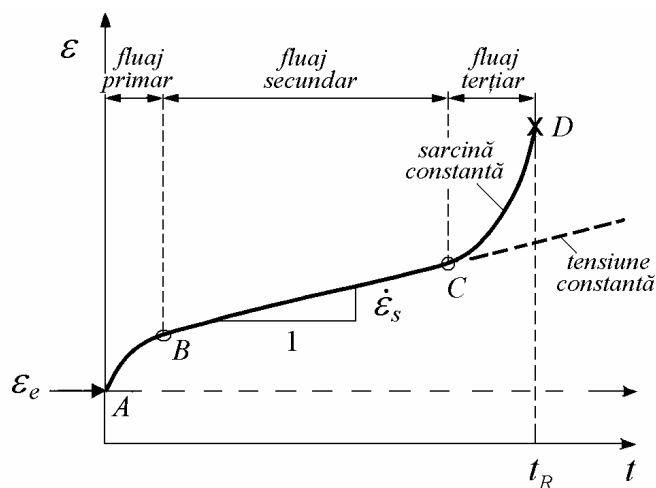


Fig. 19.1

La oțeluri, încercarea se face conform *STAS 6596-81* fără întreruperea sarcinii, pentru alungiri specifice între 0,1 și 1%, durate de la 100 ore până la zeci de mii de ore și temperaturi între $600^{\circ}C$ și $1000^{\circ}C$.

De obicei se măsoară deformația specifică totală, ε , care se compune din deformația plastică de fluaj, ε_f , și deformația elastică, ε_e , reprezentată prin segmentul OA . Uneori pe diagramă se reprezintă numai deformația plastică. În acest caz, axa absciselor este desenată cu linie întreruptă (Fig. 19.1).

Panta curbei de fluaj definește viteza de fluaj

$$v_f = \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_f}{dt}, \quad (19.1)$$

care, de fapt, este viteza deformației plastice ireversibile.

Pe curba de fluaj se pot distinge trei zone: (1) domeniul *fluajului primar* (*nestabilizat*) AB , în care viteza de fluaj scade continuu; (2) domeniul *fluajului secundar* (*stabilizat*) BC , în care viteza de fluaj este constantă și are valoarea minimă; și (3) zona *fluajului terțiar* (*accelerat*) CD , cu viteză crescătoare până la rupere. Abscisa punctului D este t_R - *durata până la rupere*.

Viteza minimă de fluaj, $\dot{\varepsilon}_s$, panta dreptei BC , este funcție de tensiunea aplicată și de temperatură. La un oțel utilizat la turbine cu abur, o valoare uzuală este $\dot{\varepsilon}_s = 10^{-7} \text{ ore}^{-1}$, ceea ce corespunde unei alungiri specifice de 1% în 100 000 ore (11 ani).

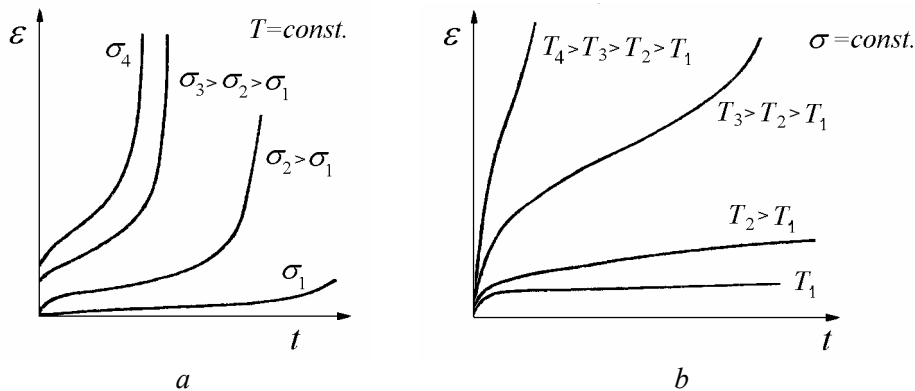


Fig. 19.2

La un material dat, studiul complet al deformației la fluaj necesită experiențe care să conducă la construirea a două familii de curbe în coordonate “alungire specifică - timp”: (1) curbe de fluaj construite pentru o temperatură dată (încercări izoterme) și diferite valori ale tensiunii de întindere (fig. 19.2, a); (2) curbe de fluaj construite pentru o anumită valoare a tensiunii aplicate (încercări “izobare”) și diferite temperaturi constante (fig. 19.2, b).

19.1.2 Fluajul primar

La temperaturi de ordinul $0,3 T_i$ are loc fluajul *nestabilizat*, domeniul *AB* în figura 19.1. Descreșterea vitezei de deformare este descrisă de relația empirică (E. N. daC. Andrade, 1910)

$$\varepsilon_p = A_1 \cdot t^{1/3}, \quad (19.2)$$

unde A_1 este o constantă de material.

De obicei deformația specifică de fluaj este sub 1% din deformația specifică totală. Încetinirea fluajului este determinată de *ecruisarea* materialului care limitează deplasarea dislocațiilor. În acest domeniu, comportarea mecanică este puternic dependentă de istoria materialului, deci de eventualele solicitări care au produs dislocații înaintea încercării la fluaj.

19.1.3 Fluajul terțiar

În stadiul fluajului *accelerat*, domeniul *CD* în figura 19.1, deteriorările se acumulează sub formă de cavități interne, care cresc progresiv, producând micșorarea secțiunii efective a epruvetei, deci o creștere locală a tensiunilor de întindere, care accelerează deformarea. La aceasta se adaugă gâtuirea epruvetei. La o forță constantă de întindere tensiunile cresc, iar viteza de fluaj crește mai repede decât tensiunile. La multe aliaje metalice de înaltă rezistență se produce o *rupere ductilă* la deformații specifice mici, sub 1%.

În figura 19.1 scara timpului a fost mult mărită în regiunea *CD*, pentru claritate. Deoarece funcționarea în regiunea terțiară nu este recomandabilă, se consideră că sfârșitul duratei de serviciu a unei piese coincide cu punctul *C*, sfârșitul fluajului stabilizat.

19.1.4 Fluajul secundar

La temperaturi peste $0,3 T_i$ are loc fluajul *stabilizat* (staționar). În regiunea *BC* viteza de deformare este minimă și constantă, iar deformația specifică crește continuu în timp. Odată cu creșterea temperaturii, încetinirea fluajului prin *ecruisare* este compensată de activarea termică a mișcării dislocațiilor și fenomene de difuzie, care duc la stabilizarea fenomenului.

19.1.4.1 Legea Norton-Bailey

Tensiunile mecanice aplicate produc forța motrice care determină mișcarea dislocațiilor și difuzia atomilor. Când tensiunile cresc, viteza de deformare crește.

În general

$$\dot{\epsilon}_s = B\sigma^m, \quad (19.3)$$

unde m este exponentul tensiunii iar B este o constantă de material.

În stadiul fluajului secundar, variația vitezei de fluaj, $\dot{\epsilon}_s$, cu tensiunile aplicate este ilustrată în figura 19.3, în care se disting trei zone:

La tensiuni de valori medii și la temperaturi $0,3T_t < T < 0,5T_t$, în zona centrală NP este valabilă legea propusă de F. H. Norton (1939) și W. Bailey (1935)

$$\dot{\epsilon}_s = \left(\frac{\sigma - \sigma_{prag}}{K} \right)^m, \quad (19.3, a)$$

în care m este exponentul lui Norton (cu valori $m = 3 \dots 8$), K este o constantă de material și σ_{prag} este o tensiune prag care se anulează la temperaturi $T > 0,5T_t$. Datorită formei analitice a ecuației (19.3) se spune că în zona NP are loc un *fluaj cu legea puterilor* ('power-law creep') descris, în coordonate logaritmice, de o linie dreaptă.

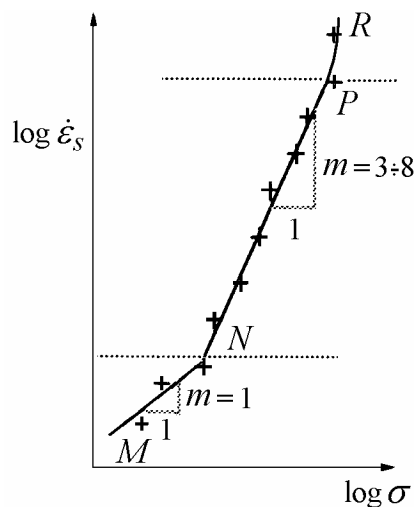


Fig. 19.3

În zona MN , la tensiuni de valori reduse și temperaturi înalte $T > 0,7T_t$, viteza de fluaj este proporțională cu tensiunea aplicată, ceea ce corespunde valorilor $m=1$ și $\sigma_{prag} = 0$ în relația (19.3, a).

În zona PR , la tensiuni foarte mari, apare o abatere de la liniaritate a curbei reprezentate în coordonate logaritmice. În punctul P , tensiunile sunt de ordinul $\sigma \cong 5,5 \cdot 10^{-4} G$, unde G este modulul de forfecare al materialului.

19.1.4.2 Ecuția lui Arrhenius

Pentru o valoare dată a tensiunilor aplicate și la temperaturi $T > 0,5T_f$, viteza de fluaj depinde de temperatura T . Experiența arată că $\ln \dot{\epsilon}_s$ este o funcție liniară descrescătoare de $1/T$ (fig. 19.4).

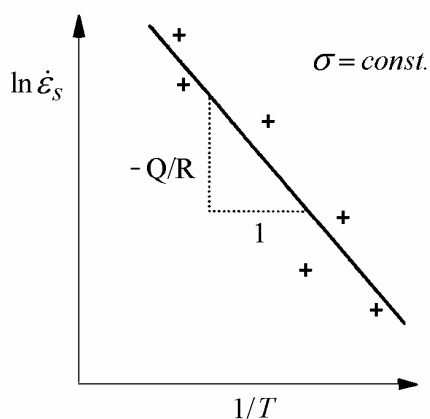


Fig. 19.4

Dacă se introduce o energie de activare la fluaj Q , se stabilește relația

$$\dot{\epsilon}_s = A e^{-Q/RT}, \quad (19.4)$$

unde $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ este constanta gazelor perfecte. Relația (19.4) are forma ecuației lui S. Arrhenius (1889) pentru difuzivitate

$$D = D_0 e^{-Q/RT}. \quad (19.5)$$

Aceasta descrie mecanismele de tip difuzie care constituie baza fizică a fenomenelor de fluaj. Din *Tabelul 19.1* se observă că la metale pure, energia de activare la fluaj Q este aproximativ egală cu energia de autodifuzie Q_A .

Tabelul 19.1

| Metalul | Exponentul m | Q , kcal/mol | Q_A , kcal/mol |
|---------|-------------------|-------------------|---------------------|
| Al | 4,4 | 34 | 34 |
| Cu | 4,8 | 48,4 | 47,1 |
| Au | 5,5 | 48 ± 5 | 41,7 |
| Ni | 4,6 | 66,5 | 66,8 |
| Pb | 4,2 | $24,2 \pm 2,5$ | 24,2 |
| Ta | 4,2 | 114 ± 4 | 110 |
| Cd | 4,3 | 19 ± 2 | 19,1 |
| Zn | 6,1 | $21,6 \pm 1$ | 24,3 |

19.1.4.3 Legea fluajului secundar

La temperaturi $T > 0,5T_l$, dacă se combină ecuațiile (19.3) și (19.4) se obține o relație care descrie dependența vitezei de fluaj atât de temperatură cât și de tensiunea aplicată

$$\dot{\epsilon}_s = C \sigma^m e^{-Q/RT}, \quad (19.6)$$

unde m , C , $\text{MPa}^{-m}\text{ore}^{-1}$, și Q , J/mol , sunt constante de material, care urmează a fi determinate prin încercări la fluaj.

Se mai utilizează forma adimensională

$$\frac{\dot{\epsilon}_s}{\dot{\epsilon}_0} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m e^{-Q/RT}. \quad (19.6, a)$$

Ecuția vitezei de fluaj (19.6) se poate scrie

$$\ln \dot{\epsilon}_s = \ln C + m \cdot \ln \sigma - \frac{Q}{R} \cdot \frac{1}{T}. \quad (19.7)$$

Rezultă că energia de activare se poate determina experimental reprezentând $\ln \dot{\epsilon}_s$ în funcție de $1/T$ (fig. 19.5, a). Exponentul tensiunii m se poate determina reprezentând $\ln \dot{\epsilon}_s$ în funcție de $\ln \sigma$ (fig. 19.5, b).

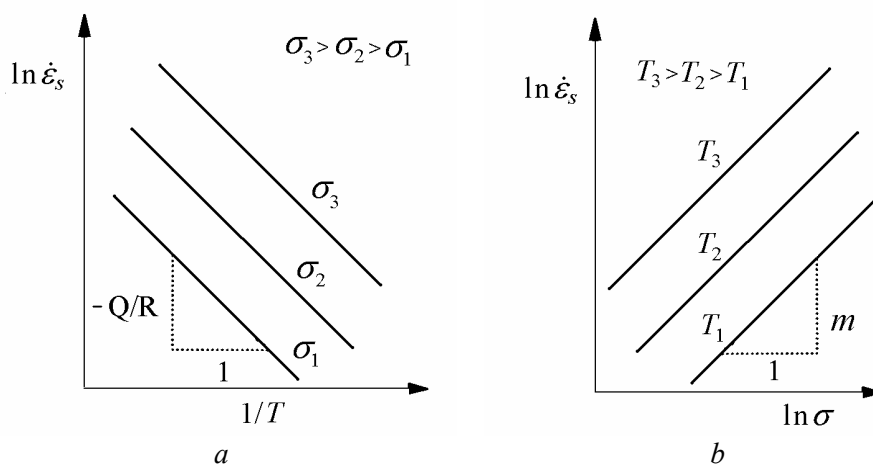


Fig. 19.5

Uzual, diagramele din figura 19.5 se trasează în coordonate $\log \dot{\epsilon}_s - 1/T$ și $\log \dot{\epsilon}_s - \log \sigma$, fiind forma cea mai utilizată de prezentare a proprietăților de fluaj.

Exemplul 19.1

Să se determine tensiunea maximă admisibilă într-o paletă de turbină cu gaze care trebuie să funcționeze la 788°C astfel ca, în 40000 ore de funcționare continuă, deformația specifică să nu depășească 3%. Materialul paletii este un superaliaj pe bază de nichel, având un modul de elasticitate $E = 186\text{ GPa}$ la 788°C , pentru care s-au determinat experimental curbele $\dot{\epsilon}_s - \sigma$ din figura 19.6, *a* reprezentate în coordonate logaritmice (R. O. Ritchie, 2006).

Rezolvare

Se neglijează fluajul primar, terțiar și deformația specifică elastică (ipoteză ce urmează a fi verificată la sfârșit). Se consideră că fluajul stabilizat este descris de o ecuație constitutivă de forma (19.6, *a*)

$$\frac{\dot{\epsilon}_s}{\dot{\epsilon}_0} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m e^{-Q/RT}.$$

Această expresie conține trei parametri necunoscuți, exponentul m , tensiunea σ_0 și energia de activare Q , care se determină pe baza datelor din figura 19.6, *a* unde se presupune că dreptele sunt paralele. Se alege $\dot{\epsilon}_0 = 1 \text{ ore}^{-1}$.

Exponentul m se determină din relația

$$m = \frac{\Delta \log \dot{\epsilon}_s}{\Delta \log \sigma} \Big|_{T=\text{const}},$$

considerând câte două puncte pe fiecare curbă de fluaj (pentru aceeași temperatură), conform datelor din Tabelul 19.2.

Tabelul 19.2

| T | σ, MPa | $\dot{\epsilon}_s, \text{ore}^{-1}$ | $\Delta \log \sigma$ | $\Delta \log \dot{\epsilon}_s$ | m |
|-----------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|--------------------------------|------|
| 705°C (978 K) | 140 | $3,31 \cdot 10^{-7}$ | log 1,5 | 1,0 | 5,68 |
| | 210 | $3,31 \cdot 10^{-6}$ | | | |
| 760°C (1033 K) | 140 | $1,45 \cdot 10^{-5}$ | log 1,5 | 1,0 | 5,68 |
| | 210 | $1,45 \cdot 10^{-4}$ | | | |
| 815°C (1088 K) | 140 | $1,80 \cdot 10^{-4}$ | log 1,5 | 1,0 | 5,68 |
| | 210 | $1,80 \cdot 10^{-3}$ | | | |

Raportul Q/R se calculează cu relația

$$\frac{Q}{R} = - \frac{\Delta \ln \frac{\dot{\epsilon}_s}{\dot{\epsilon}_0}}{\Delta \left(\frac{1}{T} \right)} \Bigg|_{\sigma = \text{const}}$$

care reprezintă panta unei linii $\sigma = \text{const.}$ în coordonate $\log \dot{\epsilon}_s - 1/T$ (fig. 19.6, b).

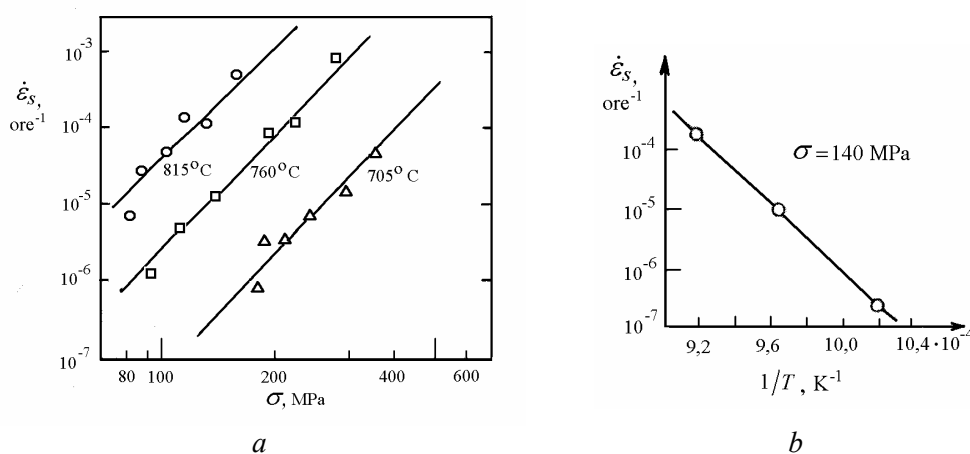


Fig. 19.6

Pentru trasarea acestei linii se folosesc datele din Tabelul 19.3, calculate pentru $\sigma = 140 \text{ MPa}$.

Tabelul 19.3

| T | $1/T \text{ (K}^{-1}\text{)}$ | $\dot{\epsilon}_s$ |
|-----------------------|-------------------------------|----------------------|
| 705°C | $10,225 \cdot 10^{-4}$ | $3,31 \cdot 10^{-7}$ |
| 760°C | $9,68 \cdot 10^{-4}$ | $1,45 \cdot 10^{-5}$ |
| 815°C | $9,19 \cdot 10^{-4}$ | $1,80 \cdot 10^{-4}$ |

Rezultă

$$\frac{Q}{R} = - \frac{2,303 \cdot \ln \frac{1,8 \cdot 10^{-4}}{3,31 \cdot 10^{-7}}}{9,19 \cdot 10^{-4} - 10,225 \cdot 10^{-4}} = 6,0856 \cdot 10^4 \text{ K.}$$

Pentru $T = 705^{\circ}\text{C}$ (978 K), $\sigma = 140 \text{ MPa}$ și $\dot{\epsilon}_s = 3,31 \cdot 10^{-7} \text{ ore}^{-1}$ se calculează

$$\sigma_0 = \sigma \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_s} \right)^{\frac{1}{m}} e^{-\frac{Q}{mRT}},$$

$$\sigma_0 = 140 \cdot \left(\frac{1}{3,31 \cdot 10^{-7}} \right)^{\frac{1}{5,68}} e^{-\frac{6,0856 \cdot 10^4}{5,68 \cdot 978}} = 0,0338 \text{ MPa}.$$

Pentru funcționarea 40000 ore la 788^0C ($1061 K$), viteza de fluaj este

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{\varepsilon_s}{t} = \frac{0,03}{4 \cdot 10^4} = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ ore}^{-1}.$$

Din ecuația (19.6, a) se obține

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\varepsilon}_s}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{Q}{mRT}},$$

$$\sigma = 0,0338 \cdot \left(\frac{7,5 \cdot 10^{-7}}{1} \right)^{\frac{1}{5,68}} e^{\frac{6,0857 \cdot 10^4}{5,68 \cdot 1061}} = 68,93 \text{ MPa},$$

deci tensiunea maximă admisibilă în serviciu este

$$\sigma = 69 \text{ MPa}.$$

Deformația specifică elastică este

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} = \frac{69}{186 \cdot 10^3} = 3,7 \cdot 10^{-4} = 0,037\%,$$

deci neglijarea ei a fost justificată.

19.1.5 Limite de fluaj

Curbele de deformație izotermă sub sarcină constantă constituie baza calculelor la fluaj. Pentru compararea rezistenței la fluaj a diferitelor materiale, s-au introdus două caracteristici convenționale numite *limită de fluaj* ('creep strength'). În continuare se redau definițiile din STAS 6637-75.

Limita de fluaj convențională (tehnică) reprezintă tensiunea practic constantă care produce, după o durată de încercare dată, o *alungire specifică la fluaj* de valoare dată, la o anumită temperatură.

În calcule se utilizează $\sigma_{1/10^5/T}$, tensiunea care produce o deformare specifică permanentă de 1% după 100 000 ore (11 ani) de funcționare, la temperatura dată T . La oțelul inoxidabil AISI 316, limita de fluaj tehnică la 800°C pentru o alungire specifică de 1% în 1000 ore (42 zile) este 210 MPa.

În componentele echipamentelor termice supuse la temperaturi înalte din centralele termoelectrice, deteriorarea prin fluaj este evitată prin alegerea temperaturilor maxime în serviciu și a tensiunilor maxime admisibile pentru a limita deformările specifice de fluaj la valori sub 1% în 100000 ore.

Limita de fluaj statică reprezintă tensiunea practic constantă care produce, după o durată de încercare dată, o *viteză medie de fluaj* prescrisă (de obicei $10^{-5}\%$ /oră sau $10^{-3}\%$ /oră), la o anumită temperatură.

Pentru o viteză de fluaj constantă, o alungire specifică de 1%, deci 10^{-2} , în 11 ani (10^5 ore) corespunde unei viteze de fluaj de 10^{-7}ore^{-1} sau $10^{-5}\%$ /oră.

Oțelurile cu înaltă rezistență la fluaj conțin crom, molibden, vanadiu, precum și wolfram și neobiu. Cele utilizate în fabricarea componentelor care lucrează la temperaturi înalte în centrale termoelectrice sunt proiectate pentru temperaturi de $540-750^{\circ}\text{C}$, presiuni de 160-370 bar și durate de serviciu de $2,5 \cdot 10^5$ ore. Limitele inferioare sunt reprezentative pentru tehnologia actuală. Rezistența tehnică de durată este 100 MPa pentru 10^5 ore.

Aliajele cu nichel din motoarele de aviație lucrează la temperaturi peste 1000°C , presiuni de 3 bar și durate de serviciu de 10^4 ore, având o rezistență tehnică de durată de 10 MPa.

Aliajele refractare pe bază de V-Cr-Ti pentru centralele nucleare cu reactoare răcite cu litiu sau heliu sunt proiectate să funcționeze la temperaturi de $650-800^{\circ}\text{C}$ și tensiuni de 75 – 380 MPa.

Încercările la fluaj se fac conform *ASTM Standard E139-96*, pe epruvete fabricate conform *ASTM Standard E8-96a*.

19.2 Ruperea prin fluaj

În multe aplicații practice interesează comportarea la fluaj până la rupere. Se determină timpul până la rupere, timpul până la apariția fluajului terțiar, durata fluajului terțiar în raport cu durata totală până la rupere.

Încercarea la rupere prin fluaj a oțelului, la temperaturi ridicate, se face conform STAS 8894/I-80. Epruvetele sunt solicitate la întindere, la o temperatură constantă, T , și la o tensiune de întindere constantă, σ_R , mai mare ca tensiunea aplicată la încercarea pentru determinarea curbei de fluaj. Se măsoară timpul necesar t_R până la ruperea epruvetei. Rezultatele se prezintă sub forma unor *curbe izoterme de rupere prin fluaj* (fig. 19.7). Se reprezintă logaritmul tensiunii de încercare în funcție de logaritmul duratei de rupere la fluaj, pentru diferite valori ale temperaturii absolute. Durata încercărilor poate fi de la minimum 100 ore până la zeci de mii de ore ($1000 \text{ ore} \cong 42 \text{ zile}$, $10^4 \text{ ore} \cong 14 \text{ luni}$, $10^5 \text{ ore} \cong 11 \text{ ani}$).

Prin prelucrarea datelor experimentale se determină *rezistența tehnică de durată* R_r ('rupture strength'). Conform STAS 6637-75 aceasta reprezintă sarcina statică constantă raportată la aria secțiunii transversale inițiale a epruvetei care produce ruperea epruvetei după o durată de timp prescrisă, la o anumită temperatură. În calcule se utilizează $\sigma_{R/10^5/T}$, rezistența tehnică de durată corespunzătoare la $t_R = 10^5$ ore și temperatura T . Aceasta se împarte la un coeficient de siguranță $c_r = 1,5$, rezultând o *rezistență admisibilă la fluaj*.

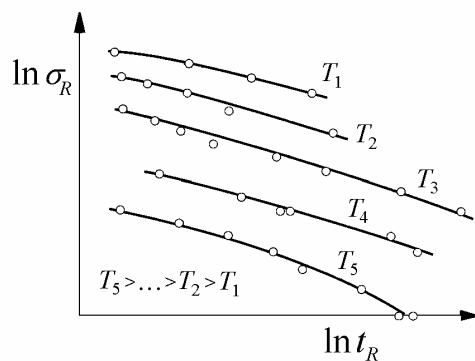


Fig. 19.7

Curbele din figura 19.7 se aproximează prin drepte, descrise de ecuații

$$\sigma_R = C_R \sigma_r \left(\frac{t_R}{t_{R_0}} \right)^n \quad (19.8)$$

unde σ_r este rezistența la rupere statică iar t_{R_0} este un timp de referință.

Duratele de exploatare ale pieselor din oțel sunt cu mult mai mari decât duratele încercărilor prin care se stabilesc curbele de fluaj. Caracteristicile necesare

calculului de dimensionare se determină prin extrapolarea rezultatelor încercărilor, așa cum se arată în paragraful 19.5.

19.3 Relaxarea tensiunilor

Relaxarea este procesul de micșorare în timp a tensiunilor dintr-un material, la deformații specifice totale constante. Un exemplu tipic este relaxarea buloanelor de prindere a flanșelor conductelor de abur supraîncălzit sau a carcaselor turbinelor, care poate duce la pierderea etanșeității.

Fenomenul intervine și în oboseala termică a unor componente ale cazanelor cu abur. Relaxarea tensiunilor face ca oboseala la număr redus de cicluri și temperaturi înalte să fie dependentă de frecvența și forma de undă a solicitării, în special de durata menținerii constante a deformațiilor specifice ('strain hold').

Încercarea de relaxare prin tracțiune se face conform standardului *SR EN 10319-1:2004*. Epruveta este încărcată cu o forță de întindere care produce o tensiune inițială, σ_0 , inferioară limitei de proporționalitate a materialului și menținută la temperatură și lungime constante. Încărcarea inițială se alege între 0,6-0,8 din încărcarea corespunzătoare rezistenței de rupere la tracțiune. Încercarea la relaxarea a sârmelor pentru beton precomprimat se face conform *STAS 7209-87*.

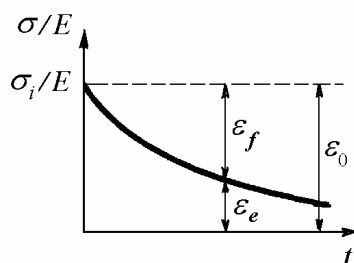


Fig. 19.8

Deformația specifică totală inițială, ϵ_0 , care rămâne constantă în timp, are o componentă elastică $\epsilon_e = \sigma/E$ și una plastică, ϵ_f , produsă de fluaj

$$\epsilon_0 = \epsilon_e + \epsilon_f = \text{const.}$$

Deformația plastică ϵ_f crește în timp, deci deformația elastică se micșorează (fig. 19.8) și tensiunea σ scade.

Derivând în raport cu timpul, se obține

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_f}{dt} = 0. \quad (19.9)$$

Dacă variația vitezei de fluaj cu tensiunea este descrisă de relația (19.3), care se consideră valabilă și în procesul de descreștere a tensiunilor la relaxare, atunci ecuația (19.9) devine

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + B\sigma^m = 0. \quad (19.10)$$

Prin separarea variabilelor rezultă

$$dt = -\frac{1}{EB} \frac{d\sigma}{\sigma^m}.$$

Prin integrare se obține timpul de relaxare a tensiunii de la valoarea inițială $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ la valoarea σ_t la momentul t

$$t = -\frac{1}{EB} \int_{\sigma_0}^{\sigma_t} \frac{d\sigma}{\sigma^m} = \frac{1}{EB(m-1)} \left(\frac{1}{\sigma_t^{m-1}} - \frac{1}{\sigma_0^{m-1}} \right). \quad (19.11)$$

Valoarea tensiunii relaxate la timpul t este

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{\left[tEB(m-1)\sigma_0^{m-1} + 1 \right]^{\frac{1}{m-1}}}, \quad \text{pentru } m \neq 1 \quad (19.12)$$

$$\sigma_t = \sigma_0 e^{-EBt} \quad \text{pentru } m = 1. \quad (19.13)$$

În practică se constată că relaxarea tensiunilor are loc ceva mai repede decât conform ecuației (19.11) datorită fluajului primar care a fost neglijat.

Exemplul 19.2

La un cablu din oțel cu exponentul tensiunii $m=1$, solicitat inițial cu o tensiune de 100 MPa, se observă o scădere a tensiunii cu 2 MPa după șase săptămâni. Cu ce tensiune inițială trebuie montat cablul ca după un an aceasta să nu scadă sub 150 MPa.

Rezolvare

Înlocuind datele încercării în ecuația (19.13) rezultă

$$98 = 100 \cdot e^{-6EB}, \quad \frac{1}{EB} = \frac{6}{\ln \frac{100}{98}} = 297 \text{ săptămâni.}$$

În configurația finală

$$150 = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{52}{297}}, \quad \sigma_0 = 150 \cdot e^{\frac{52}{297}} = 178,7 \text{ MPa}.$$

Exemplul 19.3

Buloanele flanșelor unei conducte cu abur sunt strânse la o tensiune inițială de 400 MPa. La ce valoare se relaxează tensiunea din buloane după 10000 ore de funcționare dacă oțelul acestora are următoarele caracteristici: $E = 200 \text{ GPa}$, $m = 3$, $B = 4,8 \cdot 10^{-34} \text{ ore}^{-1} \text{ Pa}^{-3}$.

Rezolvare

Înlocuind valorile numerice cunoscute în relația (19.11) rezultă

$$10000 = \frac{1}{200 \cdot 10^9 \cdot 4,8 \cdot 10^{-34} \cdot 2} \left[\frac{1}{(\sigma_t \cdot 10^6)^2} - \frac{1}{(400 \cdot 10^6)^2} \right],$$

$$19,2 \cdot 10^{-7} = \frac{1}{\sigma_t^2} - \frac{1}{400^2},$$

$$\sigma_t = 349,8 \text{ MPa}.$$

Exemplul 19.4

Buloanele carcasi unei turbine cu abur trebuie restrânse periodic din cauza relaxării tensiunilor. Care este intervalul de timp între două strângeri consecutive în care tensiunea inițială de 400 MPa dintr-un bulon scade la jumătate. Se dau caracteristicile materialului: $E = 200 \text{ GPa}$, $m = 3$, $B = 4 \cdot 10^{-27} \text{ ore}^{-1} \text{ Pa}^{-3}$.

Rezolvare

Din relația (19.11), pentru $\sigma_t = \sigma_0/2$, se obține expresia intervalului de timp t_s între două strângeri consecutive

$$t_s = \frac{2^{m-1} - 1}{(m-1)EB\sigma_0^{m-1}}.$$

Pentru $m = 3$ se obține

$$t_s = \frac{3}{2EB\sigma_0^2},$$

$$t_s = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{27} \cdot 400^2} = 11718 \text{ ore} = 17 \text{ luni}.$$

19.4 Mecanismele fluajului

Durata de exploatare a unei turbine cu abur este de minimum 40 ani. Dacă deformația specifică admisibilă de fluaj este de 1%, atunci viteza de fluaj este de ordinul 10^{-11} s^{-1} . Extrapolarea la această viteză pe baza datelor măsurabile în laborator este riscantă, deci este necesară înțelegerea mecanismelor fizice care stau la baza fenomenelor de fluaj.

La temperaturi joase, deformația plastică de fluaj se produce prin lunecarea relativă a dislocațiilor. La temperaturi înalte există două mecanisme principale de deformare numite *fluaj prin difuzie* și *fluaj prin dislocații*, deși ambele sunt produse de mecanisme de difuzie.

Viteza de fluaj staționar variază cu tensiunea, σ , cu temperatura absolută, T , și cu dimensiunea medie a grăunților cristalini, d , conform relației

$$\dot{\epsilon}_s = A \frac{DGb}{k_B T} \left(\frac{b}{d}\right)^p \left(\frac{\sigma}{G}\right)^m, \quad (19.14)$$

unde

$D = D_0 e^{-Q/RT}$ este coeficientul de difuzie corespunzător,

D_0 este o frecvență caracteristică,

G – modulul de forfecare al materialului,

b – lungimea vectorului Burgers (distanța medie între atomi),

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ este constanta lui Boltzmann,

p – exponentul inversei dimensiunii grăunților,

m – exponentul tensiunii,

A – constantă adimensională.

În aliaje metalice $m = 3$ iar în majoritatea metalelor pure $m = 4,5 \div 6$.

Vectorul Burgers măsoară diferența între rețeaua distorsionată în jurul dislocației și rețeaua perfectă (J. M. Burgers, 1939). El indică direcția și mărimea deplasării atomice care apare când o dislocație se mișcă.

Metalele pure care au modulul de forfecare G de valori mari, ca tungstenul, molibdenul, și aliajele de crom cu tungsten și molibden, sunt materiale rezistente la fluaj. În general, materialele ingineresti sunt “întărite” prin precipitații care se acumulează la marginile grăunților și încetinesc fluajul.

19.4.1 Fluajul prin difuzie

În corpuri solide, difuzia definește mișcarea atomilor în interiorul grăunților cristalini și în lungul marginilor grăunților. La temperaturi înalte, $T > 0,7T_l$, agitația termică este suficientă ca atomii să difuzeze sub acțiunea tensiunilor mecanice aplicate, producând alungirea grăunților pe direcția de solicitare.

Există două feluri de fluaj prin difuzie: (a) prin difuzie intragranulară (Nabarro-Herring) și (b) prin difuzie la limita grăunților (fluaj Coble). Ambele apar în zona MN a diagramei din figura 19.3, în care viteza de fluaj este proporțională cu tensiunea aplicată.

19.4.1.1 Fluajul Nabarro-Herring

Fluajul prin difuzie în interiorul grăunților cristalini, observat de F. R. N. Nabarro (1948) și C. Herring (1950), este favorizat la temperaturi relativ înalte.

Fenomenul este mai intens în zonele cu densitate mai mare a golurilor (lacunelor). Atomii migrează spre zonele unde tensiunile au valori minime, iar golurile migrează spre zonele unde tensiunile au valori maxime. Aceasta duce la o alungire a grăunților paralel cu direcția tensiunilor de compresiune minime. Pe măsură ce grăunții se deformează, procesul încetinește.

Deoarece difuzia are loc la scara grăunților individuali, distanțele de difuzie sunt mai mici în materiale cu grăunți fini, care astfel sunt mai susceptibile la fluaj.

Viteza de fluaj este proporțională cu tensiunea aplicată, σ , și invers proporțională cu pătratul dimensiunii medii a grăunților, d :

$$\dot{\epsilon}_{NH} = A_2 \frac{\sigma}{d^2 T} e^{-Q/RT} . \quad (19.15)$$

Uneori se utilizează relația

$$\dot{\epsilon}_{NH} = \frac{7 \sigma D_0 b^3}{k_B T d^2} e^{-Q/RT} , \quad (19.15, a)$$

unde $R = N_0 k_B$, iar $N_0 = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ este numărul lui Avogadro.

19.4.1.2 Fluajul Coble

Fluajul prin difuzie în lungul marginilor grăunților cristalini, observat de R. L. Coble (1963), este favorizat la temperaturi mai mici decât cel prin difuzie intragranulară, având viteze mai mari. Atomii migrează din zonele cu tensiuni de compresiune mari, spre zone cu tensiuni mai mici, modificând forma grăunților.

Viteza de fluaj este proporțională cu tensiunea aplicată, σ , și invers proporțională cu puterea a treia a dimensiunii medii a grăunților, d :

$$\dot{\epsilon}_C = A_2 \frac{\sigma}{d^3 T} e^{-Q/RT}. \quad (19.16)$$

Se mai utilizează relația

$$\dot{\epsilon}_C = \frac{50 \sigma D_0 b^4}{k_B T d^3} e^{-Q/RT}. \quad (19.16, a)$$

19.4.2 Fluajul prin dislocații

Fluajul prin dislocații apare în zona NP a diagramei din Fig. 19.3, corespunzând așa-zisului *fluaj cu legea puterilor*. Dependența de tensiune a vitezei de fluaj urmează o lege a puterilor cu un exponent $m = 3 \div 8$.

Dislocația definește linia care separă partea deformată de partea nedeformată a rețelei cristaline. Tensiunile de forfecare tind să producă deplasări relative în planul dislocației. Acestea pot fi blocate de un obstacol de tipul unui precipitat (atom străin în rețea). Activarea termică face ca atomii să difuzeze din planul dislocației, permițându-i să se deplaseze perpendicular pe direcția de alunecare până depășește obstacolul, continuând apoi să se deplaseze pe direcția de alunecare.

Se spune că fluajul are loc prin alunecarea dislocațiilor datorită “cățărării” peste obstacolele microstructurale, fenomen care poate apare doar la tensiuni relativ mari dar la temperaturi relativ mici. Cățărarea implică o rearanjare a atomilor, care se face prin difuzia golurilor, de unde apare și dependența de temperatură a procesului.

La temperaturi $0,3T_l < T < 0,5T_l$, difuzia care conduce la “cățărare” are loc în centrul dislocației, adică la marginea planului acesteia. La temperaturi $T > 0,5T_l$, difuzia are loc “în volum”, adică în interiorul grăunților.

Viteza de fluaj este proporțională cu o anumită putere, m , a tensiunii aplicate, σ , și nu depinde de dimensiunile grăunților

$$\dot{\varepsilon}_D = A_2 \frac{\sigma^m}{T} e^{-Q/RT} . \quad (19.17)$$

Se mai utilizează relația

$$\dot{\varepsilon}_D = A \frac{D_0 G b}{k_B T} \left(\frac{\sigma}{G} \right)^m e^{-Q/RT} . \quad (19.17, a)$$

unde $m = 3 \div 8$.

19.4.3 Fluajul Harper-Dorn

J. Harper și J. E. Dorn (1957) au observat un alt mecanism de fluaj în zona *MN* a diagramei din Fig. 19.3, care indică o deviere de la fluajul cu legea puterilor. Golurile difuzează din margini de dislocații care au vectorul Burgers paralel cu axa tensiunilor maxime către cele având vectorul Burgers perpendicular pe axa respectivă. Coerența agregatului cristalin este menținută prin alunecări în lungul marginilor grăunților.

Aceasta conduce la o viteză de fluaj proporțională cu tensiunea, independentă de dimensiunile grăunților și proporțională cu densitatea dislocațiilor, care este de ordinul $5 \cdot 10^7 \text{ m}^{-2}$ și independentă de tensiunea aplicată și de tratamentele anterioare ale materialului. Procesul este staționar și se dezvoltă în interiorul grăunților, deci nu apare o acumulare de material la marginile grăunților. Energia de activare este aproximativ egală cu cea de autodifuzie. Fluajul Harper-Dorn a fost observat la temperaturi ridicate $T > 0,5T_f$, la tensiuni mici și grăunți de dimensiuni mari, având viteze de fluaj de câteva ordine de mărime mai mari decât în fluaj Nabarro-Herring. Difuzia are loc “în volum”, adică în interiorul grăunților.

Viteza de fluaj are expresia

$$\dot{\varepsilon}_{HD} = A_2 \frac{\sigma}{T} e^{-Q/RT} , \quad (19.18)$$

fiind ceva mai mult decât de două ori mai mare decât $\dot{\varepsilon}_{NH}$.

19.4.4 Fluajul prin alunecarea grăunților

Tot în zona *MN* a diagramei din figura 19.3, W. A. Rachinger (1952) a observat o deviere de la fluajul cu legea puterilor explicabilă prin alunecarea relativă a grăunților. Grăunții își mențin forma inițială dar se aliniază în lungul direcției de întindere.

Pentru grăunți de dimensiuni relativ mari, viteza de fluaj este

$$\dot{\epsilon}_R = A \frac{D_0 G b^2}{k_B T d} \left(\frac{\sigma}{G} \right)^3 e^{-Q/RT} . \quad (19.19)$$

Pentru grăunți de dimensiuni mici

$$\dot{\epsilon}_R = A \frac{D_0 G b^3}{k_B T d^2} \left(\frac{\sigma}{G} \right)^2 e^{-Q/RT} . \quad (19.19, a)$$

unde D_0 este factorul de frecvență al difuzivității la marginea grăunților.

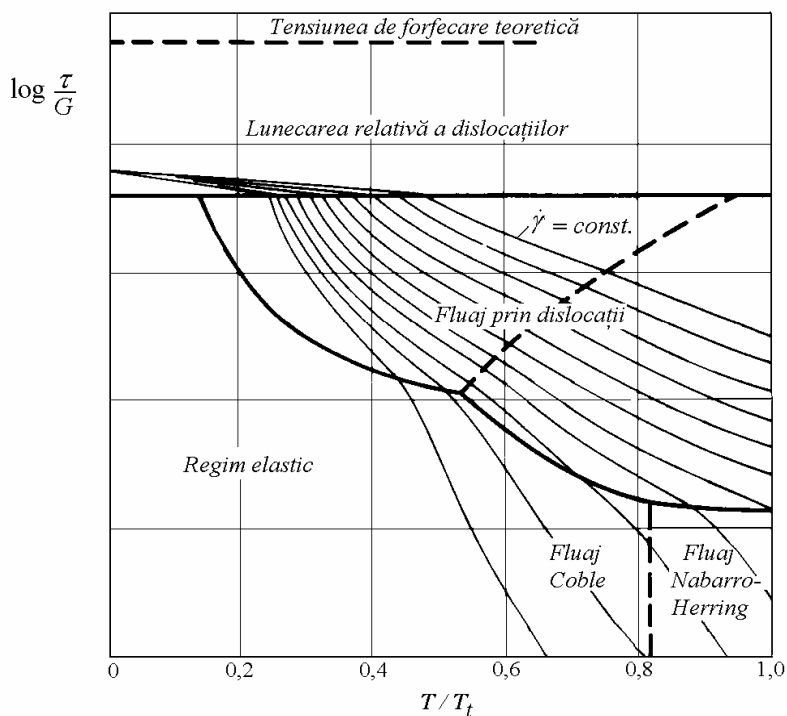


Fig. 19.9

19.4.5 Diagramele mecanismelor de deformare

Pentru un material dat, se reprezintă grafic logaritmul raportului între tensiunea tangențială și modulul de forfecare, τ/G , în funcție de temperatura omologă, T/T_t (fig. 19.9), în care se trasează linii cu valori constante ale vitezei

lunecărilor specifice, $\dot{\gamma} = const.$ (M. F. Ashby și H. J. Frost, 1982). În diagramă, sunt delimitate zonele în care un anumit mecanism de deformare este predominant, pentru o combinație dată a temperaturii și tensiunii aplicate.

Pentru fluajul la întindere uniaxială, tensiunea și viteza de deformare, σ și $\dot{\epsilon}$, se calculează în funcție de mărimile de pe diagramă, τ și $\dot{\gamma}$, cu relațiile

$$\sigma = \sqrt{3} \tau, \quad \dot{\epsilon} = \dot{\gamma} / \sqrt{3}.$$

19.4.6 Materiale cu rezistență mare la fluaj

Pentru creșterea rezistenței la fluaj a unei piese, se recomandă alegerea unui material (a) cu temperatură de topire înaltă, pentru a reduce vitezele de difuzie, (b) cu rezistență mare a rețelei cristaline, de exemplu cu legături covalente, pentru a se opune mișcării dislocațiilor, ca nitrurile și carburile de siliciu, (c) cu impurități, precipitate sau elemente în soluție solidă, care să obstrucționeze dislocațiile, (d) cu granulație care să reducă difuzia la marginile grăunților.

Materiale tipice cu rezistență mare la fluaj sunt (1) oțelurile inoxidabile înalt aliate, de ex. AISI 316, cele cu rețea cubică cu fețe centrate, pentru a rezista fluajului prin difuzie, și soluțiile solide de nichel și crom, și precipitate de carburi, utilizabile până la $600^{\circ}C$, (2) aliajele pe bază de nichel, care conțin precipitate și elemente în soluție solidă, utilizabile până la $950^{\circ}C$ și (3) materialele ceramice, alumina și nitrura de siliciu, care au rezistență mare a rețelei cristaline dar ductilitate redusă.

19.5 Încercări accelerate la fluaj

Pe durata încercării se accelerează apariția deformației specifice totale permise sau a ruperii utilizând o temperatură superioară celei de serviciu. Timpul necesar la această temperatură mai ridicată este apoi convertit în durată corespunzătoare temperaturii de serviciu, cu ajutorul *parametrilor timp-temperatură*.

19.5.1 Durata de rupere la fluaj

Se consideră valabil modelul de fluaj descris de ecuația lui Arrhenius

$$\dot{\epsilon}_s = A(\sigma) e^{-Q/RT}, \quad (19.20)$$

în care coeficientul A este funcție de tensiunea aplicată.

În formă diferențială, ecuația (19.20) se scrie

$$d\varepsilon_s = A(\sigma) e^{-Q/RT} dt .$$

Considerând că energia de activare Q nu variază în timp și neglijând constanta de integrare, se obține deformația specifică de fluaj stabilizat

$$\varepsilon_s = A(\sigma) t e^{-Q/RT} . \quad (19.21)$$

Dacă la $t = t_R$ deformația specifică la rupere este ε_{sR} , atunci durata până la rupere este

$$t_R = \frac{\varepsilon_{sR}}{A(\sigma)} e^{Q/RT} . \quad (19.22)$$

Prin logaritmare se obține

$$\log t_R = \log \frac{\varepsilon_{sR}}{A(\sigma)} + 0,4343 \frac{Q}{R} \frac{1}{T} . \quad (19.23)$$

Pe baza curbelor de rupere prin fluaj, de tipul celor din figura 19.7, se reprezintă, în coordonate semilogaritmice, durata de rupere, $\log t_R$, în funcție de inversa temperaturii, $1/T$, pentru diferite valori ale tensiunii de încercare (curbe 'izobare').

În prelucrarea datelor experimentale s-au emis două ipoteze simplificatoare, care stau la baza unor metode parametrice de extrapolare a rezultatelor încercărilor la fluaj. În metoda propusă de F. R. Larson și J. Miller (1952) se consideră că liniile de tensiune constantă sunt concurente într-un punct de pe axa ordonatelor. Aceasta presupune că $\varepsilon_{sR}/A(\sigma) = const.$, iar energia de activare variază numai cu tensiunea. În metoda propusă de O. Sherby și J. E. Dorn (1954) se consideră că liniile de tensiune constantă au aceeași pantă. Aceasta presupune că energia de activare Q este constantă iar raportul $\varepsilon_{sR}/A(\sigma)$ variază cu tensiunea aplicată.

19.5.2 Metoda Larson-Miller

În ecuația (19.21) se notează

$$\theta = t e^{-Q/RT} , \quad (19.24)$$

mărime denumită *timp compensat prin temperatură*.

Relația (19.21)

$$\varepsilon_s = A(\sigma) \cdot \theta \quad (19.25)$$

arată că, pentru o tensiune de încercare dată, curbele care reprezintă variația deformațiilor specifice de fluaj măsurate la diferite temperaturi în funcție de parametrul θ se suprapun, fapt confirmat experimental.

Aplicând relația (19.21) pentru durata până la rupere, se obține

$$\frac{\varepsilon_{sR}}{A(\sigma)} = t_R e^{-Q/RT} = \theta_R, \quad (19.26)$$

$$\log \theta_R = \log t_R - 0,4343 \frac{Q}{R} \frac{1}{T}. \quad (19.27)$$

Dacă $\varepsilon_{sR}/A(\sigma) = \text{const.}$ atunci $\theta_R = \text{const.}$ și se notează

$$\log \frac{\varepsilon_{sR}}{A(\sigma)} = \log \theta_R = -C, \quad (19.28)$$

unde C se numește *constantă de extrapolare*.

Relația (19.23) devine

$$\log t_R = -C + 0,4343 \frac{Q}{R} \cdot \frac{1}{T}. \quad (19.29)$$

Reprezentând grafic $\log t_R$ în funcție de $1/T$ pentru diferite valori ale tensiunii de încercare se obțin *liniile* din figura 19.10, concurente în punctul de ordonată $-C = \log \theta_R$.

Panta acestor drepte definește *parametrul Larson-Miller*

$$P_{LM} = 0,4343 \frac{Q}{R} = T(\log t_R + C). \quad (19.30)$$

care este funcție de tensiunea aplicată.

Pentru a calcula constanta C și valorile P_{LM} este nevoie de cel puțin două puncte pe fiecare linie de tensiune constantă. În lipsa datelor experimentale, pentru oțeluri și o largă categorie de metale se poate utiliza valoarea $C = 20$.

Deoarece parametrul P_{LM} variază cu tensiunea, se subînțelege că energia de activare Q se presupune că variază cu tensiunea. În schimb θ_R este o constantă de material, la fel ca și C .

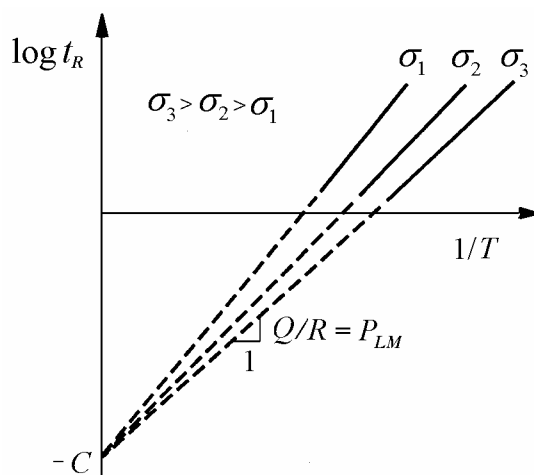


Fig. 19.10

După ce s-a calculat constanta C , se reprezintă grafic parametrul P_{LM} în funcție de tensiune în coordonate semilogaritmice $\log \sigma - P_{LM}$ (fig. 19.11). Pentru toate tensiunile și temperaturile de încercare, datele se înscriu în lungul unei singure curbe. Aceasta este utilizată pentru estimarea duratelor de rupere.

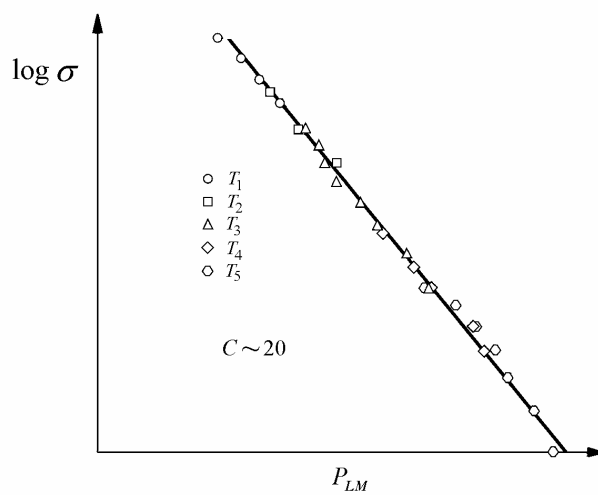


Fig. 19.11

Pentru o tensiune dată σ se determină P_{LM} apoi, pentru o temperatură T dată, din ecuația (19.30) se obține

$$\log t_R = -C + \frac{P_{LM}}{T}. \quad (19.31)$$

De remarcat că datele necesare trasării curbei $\log \sigma - P_{LM}$ prin încercări în laborator se pot obține utilizând durate de rupere t_R mult mai mici decât duratele de serviciu ale pieselor. Rezultă că datele din încercări la durate t_R mici și temperaturi T înalte sunt folosite pentru a prezice comportarea la durate t_R mai lungi și temperaturi T mai joase.

Se recomandă ca durata încercărilor să nu fie mai mică decât 10% din durata de serviciu dorită. Astfel, pentru piese de turbine cu abur energetice, proiectate pentru o durată de 20 ani, încercarea la fluaj ar trebui extinsă până la 17500 ore = 2 ani (!).

Parametrul Larson-Miller se poate folosi și pentru estimarea duratei t_f după care se obține o anumită deformare specifică de fluaj ε_s înainte de rupere.

Se pot compara diferite materiale, trasând liniile corespunzătoare pe aceeași diagramă $\log \sigma - P_{LM}$. Curbele situate în partea de sus și în dreapta diagramei indică materialele cu rezistență mai mare la fluaj.

Uneori este util să se aproximeze parametrul Larson-Miller printr-un polinom

$$P_{LM} = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3,$$

unde $x = \log \sigma$. Coeficienții b_i se obțin prin regresie neliniară.

Conform STAS 8894/2-81, rezistența tehnică de durată R_r se determină cu relația

$$\log \frac{R_r}{t_R} = a_0 + a_1P_{LM} + a_2P_{LM}^2$$

în care a_0 , a_1 , a_2 sunt constante experimentale, dependente de compoziția, structura materialului și temperatura de încercare.

Exemplul 19.5

O piesă din oțel aliat este solicitată la fluaj prin întindere uniaxială cu tensiunea 150 MPa. Care este temperatura maximă admisă dacă piesa trebuie să funcționeze 40 zile cu un coeficient de siguranță egal cu 10 față de durata până la rupere. O bară din același material încercată cu 150 MPa la 530°C s-a rupt în 260 ore.

Rezolvare

Deoarece tensiunea în serviciu este aceeași cu tensiunea de încercare, parametrul Larson-Miller se calculează cu relația (19.30) în care se alege $C = 20 \log(\text{ore})$.

Pe baza datelor încercării se calculează

$$P_{LM} = T(\log t_R + C) = (530 + 273)(\log 260 + 20) = 18000.$$

Pentru o durată de serviciu de 40 zile, cu un coeficient de siguranță egal cu 10, piesa trebuie să reziste 400 zile, deci $t_R = 9600$ ore. Rezultă

$$T = \frac{P_{LM}}{\log t_R + C} = \frac{18000}{\log 9600 + 20} = 750,5K \quad (477,5^\circ C).$$

19.5.3 Metoda Sherby-Dorn

Dacă în relația (19.27) se consideră că energia de activare Q nu variază cu tensiunea aplicată, atunci liniile de tensiune constantă trasate în coordonate $\log t_R - 1/T$ au pante constante (fig. 19.12).

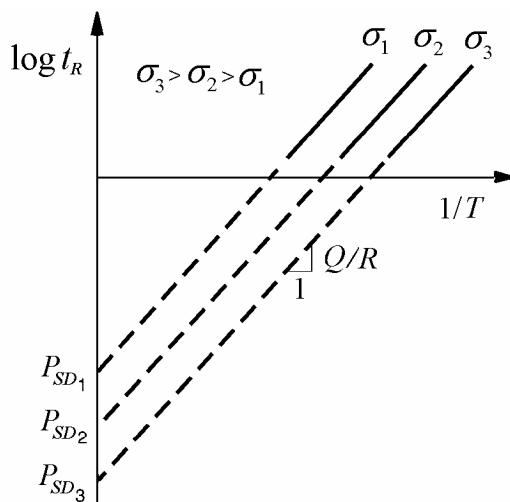


Fig. 19.12

Ordonata punctului de intersecție al unei linii 'izobare' cu semi-axa negativă a ordonatelor definește *parametrul Sherby-Dorn*

$$P_{SD} = \log \theta_R = \log t_R - 0,4343 \frac{Q}{R} \cdot \frac{1}{T} \quad (19.32)$$

iar panta dreptei este proporțională cu energia de activare Q . Aceasta are valori de 110 kcal/mol la oțeluri cu crom, molibden și vanadiu, 90 kcal/mol la oțelurile cu nichel și crom și 36 kcal/mol la aluminiu și aliaje de aluminiu (1 cal = 4,19 J).

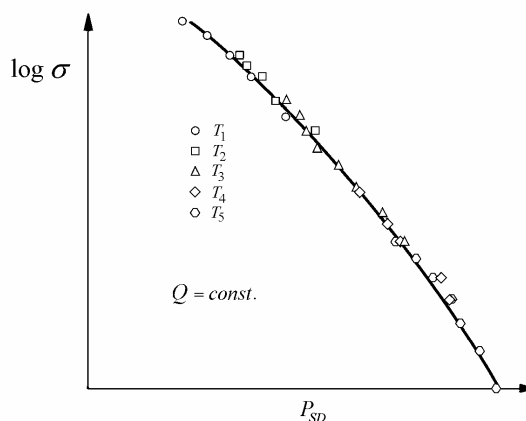


Fig. 19.13

După ce s-a calculat Q , se reprezintă grafic parametrul P_{SD} în funcție de tensiune în coordonate semilogaritmice $\log \sigma - P_{SD}$ (fig. 19.13). Punctele obținute pentru toate tensiunile și temperaturile de încercare se înscriu în lungul unei singure curbe. Aceasta este utilizată, la fel ca diagrama $\log \sigma - P_{LM}$ (fig. 19.11) pentru estimarea duratelor de rupere t_R .

Exemplul 19.6

Să se rezolve problema de la *Exemplul 19.5* folosind parametrul Sherby-Dorn.

Rezolvare

Parametrul Sherby-Dorn se calculează cu relația (19.32) în care se alege $Q = 90$ kcal/mol și $R = 2$ cal/mol · K :

$$P_{SD} = \log t_R - \frac{0,4343}{R} Q \cdot \frac{1}{T} = \log 260 - \frac{0,4343}{2} \cdot \frac{90000}{530 + 273} = -21,92 .$$

Pentru $t_R = 9600$ ore rezultă

$$T = \frac{0,4343}{R} \frac{Q}{\log t_R - P_{SD}} = \frac{0,2171 \cdot 90000}{\log 9600 - (-21,92)} = 754,4K \quad (481,4^{\circ}C).$$

Exemplul 19.7

Prin încercarea la fluaj a unui oțel austenitic s-a obținut exponentul tensiunii $m = 3$ și o viteză de fluaj stabilizat $\dot{\epsilon}_s = 2,95 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ pentru o tensiune de 18 MPa la $627^{\circ}C$ și pentru o tensiune de 4 MPa la $777^{\circ}C$. Se cer: (a) valorile difuzivității D_0 și a energiei de activare Q , (b) tensiunea care va produce aceeași viteză de fluaj stabilizat la $727^{\circ}C$.

Rezolvare

a) Înlocuind valorile numerice cunoscute în relația (19.6), pentru $A = 0$, se obține $D_0 = 2,56 \text{ MPa}^{-3} \text{ s}^{-1}$ și $Q = 236 \text{ kJ/mol}$.

b) $\sigma = 6,27 \text{ MPa}$.

Observație

Cele două metode prezentate anterior pornesc de la două ipoteze diferite privind alura dreptelor de tensiune constantă în coordonate $\log t_R - 1/T$. Ambele metode se bazează pe ecuația vitezei de fluaj (19.20), care diferă de ecuația (19.14) utilizată în prezent în majoritatea studiilor de fluaj, în care apare dependența directă de inversa temperaturii $1/T$ în plus față de cea exponențială. Totuși, ambele metode au condus la rezultate practice acceptabile și sunt incluse în standardul *STAS 8894/2-81*. Alte două metode de extrapolare, bazate pe drepte de tensiune constantă trasate în coordonate $\log t_R - T$ au fost propuse de S. S. Manson și A. N. Haferd (1953) și de A. Constantinescu (1970), fiind de asemenea incluse în standardul menționat.

19.6 Fluajul tranzitoriu

Diagramele “tensiune - durata la rupere prin fluaj” (fig. 19.7) pot fi utilizate pentru estimarea durabilității la fluaj tranzitoriu, care este exprimată în unități de timp. În cazul unei solicitări cu tensiuni variabile, dacă t_i este timpul total de solicitare la tensiunea σ_i , la care durata până la rupere este t_{Ri} , atunci

raportul t_i/t_{Ri} poate fi considerat o măsură a deteriorării, la fel cum raportul ciclurilor n_i/N_i este utilizat în ipoteza Palmgren-Miner pentru estimarea durabilității la oboseală (E. L. Robinson, 1980).

Pentru o singură secvență de încărcare, suma deteriorărilor la diferitele nivele de solicitare este teoretic egală cu unitatea

$$\sum \frac{t_i}{t_{Ri}} = 1. \quad (19.33)$$

În cazul unor secvențe de încărcare repetate, dacă B_f este numărul de repetiții ale secvenței până la rupere, suma din membrul stâng se înmulțește cu B_f .

Variațiile temperaturii pot fi incluse prin utilizarea parametrilor timp-temperatură. La fiecare nivel al tensiunii, σ_i , se determină parametrul P_i , din care se obține t_{Ri} înlocuind temperatura adecvată.

În cazul interacțiunii fluajului cu oboseala, relația (19.33) se combină cu (18.63). Rezultă

$$\sum \frac{t_i}{t_{Ri}} + \sum \frac{n_i}{N_i} = 1, \quad (19.34)$$

relație în care se neglijează frecvența ciclului de solicitare, factor care determină contribuția relativă a fiecărui mecanism de deteriorare. În calcule practice, suma de mai sus se alege egală cu 0,15.

După cum s-a arătat în Capitolul 18, în cazul solicitărilor ciclice de amplitudine constantă, durabilitatea la oboseală la temperaturi inferioare celor de fluaj se poate estima pe baza proprietăților statice utilizând ecuația pantelor universale (18.46).

$$\Delta\varepsilon = 3,5 \frac{\sigma_r}{E} N^{-0,12} + \varepsilon_f^{0,6} N^{-0,6}.$$

În formularea originală, în ecuația liniei corespunzătoare deformației plastice intervine numai ductilitatea reală ε_f . U. Muralidharan și S. S. Manson (1986) au modificat ecuația componente plastice, introducând și rezistența la rupere. Ecuația modificată a pantelor universale este

$$\Delta\varepsilon = 1,17 \left(\frac{\sigma_r}{E} \right)^{0,832} N^{-0,09} + 0,266 \varepsilon_f^{0,155} \left(\frac{\sigma_r}{E} \right)^{-0,53} N^{-0,56}, \quad (19.35)$$

și conduce la estimări mai bune ale durabilității la oboseală. În practică, durabilitatea se calculează cu ambele ecuații și se alege valoarea cea mai mică.

În cazul oboselii oligociclice la temperaturi înalte, durabilitatea se calculează cu relația (S. S. Manson și G. R. Halford - 1967)

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{k}{f \cdot t_{R_0}} N^{\frac{n+0,12}{n}}}, \quad (19.36)$$

unde N este valoarea calculată din ecuația pantelor universale, k este fracțiunea de timp în care materialul este solicitat la tensiunea maximă, f – frecvența ciclului de solicitare, t_{R_0} - abscisa punctului în care linia care aproximează o curbă din figura 19.7 intersectează axa absciselor, n - panta liniei corespunzătoare temperaturii de lucru.

19.7 Mecanica ruperii la fluaj

Deformațiile dependente de timp duc la o cumulare a deteriorărilor dependentă de timp. Este posibilă inițierea și dezvoltarea fisurilor prin fluaj și prin acțiunea combinată fluaj-oboasă. Studiul propagării acestora este bazat pe mecanica ruperii elastice liniare (MREL) și mecanica ruperii elasto-plastice (MREP).

La metalele ‘ductile la fluaj’ s-au dezvoltat metode bazate pe mecanica ruperii dependente de timp. Încercările de creștere a fisurii la fluaj se fac conform *ASTM Standard E 1457-92*. Acesta nu este aplicabil materialelor fragile la fluaj, cum sunt aliajele de titan și cele de aluminiu pentru temperaturi înalte.

Viteza de propagare a fisurii la fluaj, da/dt , este dată de ecuația

$$\frac{da}{dt} = H \cdot C_t^q, \quad (19.37)$$

unde H și t sunt constante de material, iar C_t este *parametrul lui Saxena*, măsurat în $\text{kJ/m}^2 \text{ oră}$. De exemplu, pentru oțeluri Cr-Mo utilizate la echipamentul termic din centralele electrice, $H = 0,094$ și $q = 0,805$.

Datele experimentale se prezintă sub formă de diagrame ale vitezei de propagare a fisurii, da/dt , măsurată în mm/oră , în funcție de parametrul C_t , măsurat în $\text{kJ/m}^2 \text{ oră}$, trasate în coordonate logaritmice (fig. 19.14).

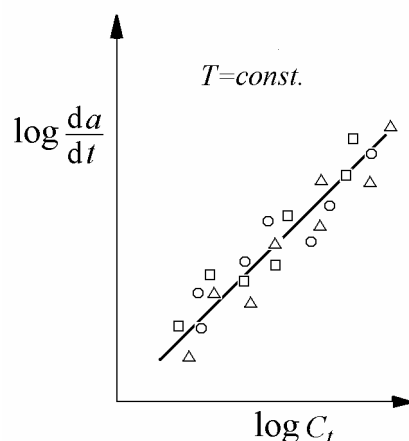


Fig. 19.14

Uneori în locul parametrului C_t se utilizează valoarea integralei C^* (A. Saxena, 1986), definită în standardul menționat.

Încercările de creștere a fisurii la fluaj și fluaj-oboseală durează de la câteva săptămâni până la un an. În cele care durează un an, se realizează viteze de creștere de ordinul a $1,3 \mu\text{m/oră}$. Datele obținute prin astfel de încercări se încadrează în domeniul util pentru proiectare și pentru stabilirea unor intervale de inspecție judicios alese.

De exemplu, la un avion inspectat la intervale de 10000 ore, se tolerează creșteri de $\pm 6,35 \text{ mm}$. Lungimea fisurii care poate rămâne neobservată la inspecție este $1,27 \text{ mm}$. Rezultă că valoarea admisibilă a vitezei medii de creștere a fisurii poate fi de $1,14 \mu\text{m/oră}$, inferioară valorii realizate la încercări.

Sunt însă cazuri în care este necesară accelerarea fluajului prin încercări de scurtă durată la temperaturi superioare celor din exploatare. Se recurge la relația (19.21) dedusă din ecuația lui Arrhenius (19.4). Prin evaluarea acesteia la valorile de referință t_{ref} și T_{ref} , rezultă

$$\ln \frac{t}{t_{ref}} = \frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right). \quad (19.38)$$

Reprezentând grafic $1/t$ în funcție de $1/T$, în coordonate logaritmice, pentru diferite valori ale tensiunii σ , se obțin linii drepte a căror pantă este $-Q/R$, de unde se calculează energia de activare. Liniile paralele arată că energia de activare este independentă de σ . Se reprezintă apoi temperatura de expunere, T , în funcție de temperatura de referință, T_{ref} , pentru diferite valori ale raportului t/t_{ref} . Rezultă timpii de expunere în încercările accelerate.

Exemplul 19.8

O piesă din Inconel (aliaj Ni-Cr-Mo) este solicitată la oboseală și fluaj, la temperatura de 816°C . Ciclul de încărcare are frecvența $f = 0,017$ cicluri/minut iar fracțiunea de timp în care materialul este solicitat la tensiunea maximă este $k = 0,3$. Proprietățile de rupere prin fluaj (ec. 19.8) la temperatura de lucru sunt $n = -0,15$, $t_{R_0} = 1$ minut, $C_R = 1,75$. Materialul are rezistența la rupere $\sigma_r = 170$ MPa, gătuirea specifică $RA = 63,3\%$ și modulul de elasticitate $E = 120$ GPa, la temperatura de încercare de 816°C . Se cere numărul de cicluri până la atingerea unei amplitudini a deformației specifice totale de 1%.

Rezolvare

Alungirea specifică reală la rupere este

$$\varepsilon_f = \ln \frac{A_0}{A} = \ln \frac{100}{100 - RA} = \ln \frac{100}{100 - 63,3} = 1,0024 .$$

Înlocuind valorile numerice în ecuația pantelor universale (18.46)

$$\Delta\varepsilon = 3,5 \frac{\sigma_r}{E} N^{-0,12} + \varepsilon_f^{0,6} N^{-0,6} ,$$

se obține relația

$$0,01 = 3,5 \frac{170}{120 \cdot 10^3} N^{-0,12} + 1,0024^{0,6} N^{-0,6} ,$$

de unde rezultă

$$N = 3063 \text{ cicluri.}$$

Dacă se ține cont de fluaj, din ecuația (19.36) se obține durabilitatea la fluaj-oboșeală

$$N' = \frac{3063}{1 + \frac{0,3}{0,017} 3063^{0,2}} = 34,46 \text{ cicluri.}$$

Pentru limita inferioară a durabilității se alege cea mai mică dintre valorile N' și $0,1N = 306,3$, deci $N' = 34,46$ cicluri. Valoarea medie a durabilității se alege $2N' = 68,93$ cicluri. Pentru limita superioară a durabilității se alege valoarea $10 \cdot N' = 344,6$ cicluri.

Proprietăți monotone ale aliajelor metalice

| Materialul | E | σ_c | σ_r | ψ | σ_f | ε_f | K | n |
|---|------|------------|------------|--------|------------|-----------------|------|------|
| | GPa | MPa | MPa | % | MPa | - | MPa | - |
| Oțel <i>SAE 950</i> 150 HB | 206 | 317 | 565 | 69 | 999 | 1,19 | 1151 | |
| Oțel <i>SAE 950X</i> laminat la cald 150 HB | 203 | 345 | 441 | 65 | 758 | 1,06 | 675 | 0,16 |
| Oțel <i>SAE 1045</i> forjat 260 HB | 200 | 622 | 915 | 59 | 1784 | 0,90 | 1762 | |
| Oțel carbon <i>AISI 1020</i> 105 HB | 203 | 260 | 441 | 61 | 713 | 0,96 | 1221 | |
| Oțel slab aliat <i>AISI 4142</i> îmbunătățit 670 HB | 199 | 1619 | 2446 | 6 | 2583 | 0,06 | 3484 | |
| Oțel slab aliat <i>SAE 4340</i> îmbunătățit | 193 | 1181 | 1243 | 57 | 1913 | 0,84 | 1634 | |
| Oțel slab aliat <i>Man-Ten</i> laminat la cald | 206 | 324 | 565 | 65 | 1000 | 1,19 | 965 | 0,21 |
| Oțel <i>RQC-100</i> îmbunătățit | 206 | 827 | 863 | | 1190 | 0,78 | 1200 | 0,08 |
| Oțel înalt aliat <i>AISI 304</i> tras la rece 36 HRC | 173 | 746 | 953 | 69 | 2037 | 1,16 | 2313 | |
| Aluminiu <i>2024-T4</i> 120 HB | 73,1 | 303 | 476 | 35 | 631 | 0,43 | 806 | 0,20 |

Proprietăți ciclice ale aliajelor metalice

| Materialul | σ_{cc} | K' | n' | σ'_f | b | ε'_f | c |
|--|---------------|------|-------|-------------|--------|------------------|--------|
| | MPa | MPa | - | MPa | - | - | - |
| Oțel SAE 950 150 HB | | 1167 | 0,20 | 846 | -0,08 | 0,20 | -0,42 |
| Oțel SAE 950X laminat la cald 150 HB | 365 | 896 | 0,143 | 827 | -0,09 | 0,68 | -0,65 |
| Oțel SAE 1045 forjat 260 HB | 407 | 2293 | 0,191 | 2022 | -0,151 | 0,517 | -0,631 |
| Oțel carbon AISI 1020 105 HB | | 1204 | 0,24 | 895 | -0,11 | 0,29 | -0,47 |
| Oțel slab aliat AISI 4142 îmbunătățit 670 HB | | 3320 | 0,07 | 2727 | -0,08 | 0,06 | -0,47 |
| Oțel slab aliat SAE 4340 îmbunătățit | | 125 | 0,117 | 1655 | -0,084 | 1,169 | -0,727 |
| Oțel slab aliat Man-Ten laminat la cald | 331 | 1200 | 0,20 | 917 | -0,095 | 0,26 | -0,47 |
| Oțel RQC-100 îmbunătățit | 586 | 1150 | 0,10 | 1160 | | 1,06 | |
| Oțel înalt aliat AISI 304 tras la rece 36 HRC | | 2489 | 0,155 | 2067 | -0,112 | 0,301 | -0,649 |
| Aluminiu 2024-T4 120 HB | | 808 | 0,098 | 900 | -0,102 | 0,334 | -0,649 |

FOTOELASTICITATEA

1. Baze fizice

Fotoelasticitatea este o metodă de analiză experimentală a tensiunilor. Ea dă o imagine completă asupra distribuției reale de tensiuni în piese de cele mai diverse forme, fiind aplicată în special corpurilor supuse la stări plane de tensiuni.

Metoda se bazează pe apariția anizotropiei optice la anumite materiale amorfe, ca urmare a unei solicitări mecanice [24].

Un model al piesei studiate, executat dintr-un material optic activ, este examinat în lumină polarizată, cu ajutorul unui *polariscop*. Materialul inițial izotrop devine temporar birefringent sub acțiunea sarcinilor aplicate.

La încărcarea modelului, raza de lumină din fiecare punct este polarizată în două plane perpendiculare unul pe celălalt, corespunzătoare cu direcțiile tensiunilor principale din punctul considerat. Cele două raze polarizate plan străbat materialul cu viteze diferite și la ieșirea din model au o diferență de drum dată de formula lui W. Wertheim (1854)

$$\delta = C(\sigma_1 - \sigma_2)h, \quad (\text{A9.1})$$

unde h este grosimea modelului, C este constanta optică a materialului iar $(\sigma_1 - \sigma_2)$ este diferența tensiunilor principale în punctul considerat.

2. Polariscopul plan

Partea principală a unei instalații de fotoelasticitate este polariscopul. *Polariscopul plan* este alcătuit din două filtre polarizante identice și orientabile în planul lor - *polarizorul* și *analizorul*, și o sursă de lumină. Între polaroizi se află dispozitivul de încărcare a modelului (fig. A9.1).

Polaroizii se obțin prin înglobarea într-o masă plastică transparentă a unor cristale microscopice, cu proprietăți *dicroice* (absorbția razei ordinare) și cu axele optice de polarizare orientate într-o singură direcție.

Sursa de lumină produce lumină albă sau monocromatică. Lumina albă difuză se obține de la becuri cu incandescență așezate în spatele unui geam alb lăptos, iar lumina monocromatică - de la o lampă cu vapori de sodiu.

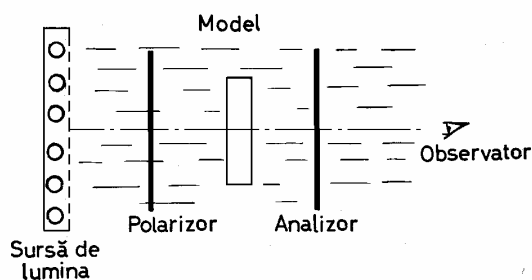


Fig. A9.1

În starea neîncărcată a modelului, pentru un polariscop cu polarizorii încrucișați (având planele de polarizare perpendiculare între ele), câmpul de observare este întunecat. Dacă se încarcă modelul, câmpul se luminează, apărând o alternanță de benzi luminoase și întunecate - în lumină monocromatică, sau colorate - dacă se lucrează în lumină albă.

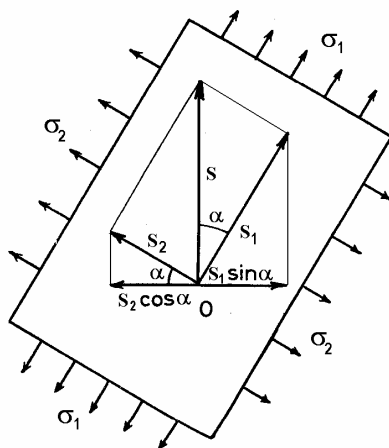


Fig. A9.2

Raza monocromatică polarizată vertical la ieșirea din polarizor poate fi reprezentată sub forma

$$s = a \cos pt,$$

unde p este pulsația luminii iar a este amplitudinea.

În model, aceasta este descompusă în două raze polarizate plan în lungul direcțiilor principale (fig. A9.2).

$$s_1 = s \cos \alpha = a \cos \alpha \cos pt, \quad s_2 = s \sin \alpha = a \sin \alpha \cos pt.$$

Aceste vibrații, care sunt în fază la intrarea în model, la ieșire sunt defazate datorită timpilor diferiți în care străbat modelul

$$s'_1 = a \cos \alpha \cos p(t - t_1), \quad s'_2 = a \sin \alpha \cos p(t - t_2),$$

unde $t_1 = h/v_1$, $t_2 = h/v_2$, v_1 și v_2 sunt vitezele de propagare ale celor două raze polarizate iar h este grosimea modelului.

Analizorul lasă să treacă doar componentele orizontale ale acestora

$$s''_1 = \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos p(t - t_1), \quad s''_2 = \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos p(t - t_2).$$

care au aceeași amplitudine dar sens contrar.

La ieșirea din analizor, fascicolul luminos are expresia

$$s_A = \frac{a}{2} \sin 2\alpha [\cos p(t - t_1) - \cos p(t - t_2)],$$

$$s_A = a \sin 2\alpha \sin \left(p \frac{t_1 - t_2}{2} \right) \sin p \left(t - \frac{t_1 - t_2}{2} \right).$$

Aceasta reprezintă o rază luminoasă de aceeași pulsație (deci aceeași culoare) și de amplitudine

$$a' = a \sin 2\alpha \sin \left(p \frac{t_1 - t_2}{2} \right),$$

în care

$$p \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{\pi c}{\lambda} (t_1 - t_2) = \frac{\pi \delta}{\lambda}$$

unde c este viteza luminii, λ – lungimea de undă a luminii monocromatice și δ – diferența de drum optic.

Intensitatea fascicolului luminos care iese din analizor este proporțională cu pătratul amplitudinii vibrației

$$I = k a^2 (\sin 2\alpha)^2 \left(\sin \frac{\pi \delta}{\lambda} \right)^2, \quad (\text{A9.2})$$

unde a este amplitudinea vibrației luminoase la ieșire din polarizor, α – înclinarea axei principale de birefrință a modelului față de cea a polarizorului.

Diferența de drum optic este

$$\delta = c(t_1 - t_2) = h(n_1 - n_2), \quad (\text{A9.3})$$

unde n_1 și n_2 sunt indicii de refracție pe direcțiile principale.

D. Brewster (1816) a stabilit legea fundamentală a fotoelasticității

$$n_1 - n_2 = K(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (\text{A9.4})$$

Din expresia intensității luminoase se deduc condițiile de extincție la ieșirea din analizor, corespunzătoare familiilor de benzi întunecoase - izocline și izocromatice.

Izocline. Prima condiție de extincție se obține din anularea primului factor

$$\sin 2\alpha = 0 \quad \text{deci pentru} \quad \alpha = n \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{A9.5})$$

Ea se realizează pentru punctele în care direcțiile principale ale tensiunilor coincid cu direcțiile planelor de polarizare ale polariscopului. Datorită continuității stării de tensiuni în interiorul modelului, aceste puncte apar într-o succesiune continuă, rezultând linii de extincție numite izocline.

Izoclinele sunt locurile geometrice ale punctelor de egală înclinare a tensiunilor principale, puncte în care direcțiile principale coincid cu direcțiile planelor de polarizare ale polaroizilor în momentul observației.

Condiția de extincție a izoclinelor nu depinde de lungimea de undă a luminii folosite, astfel că ele apar ca benzi întunecate atât în lumină albă cât și în lumină monocromatică.

Prin rotirea simultană a polaroizilor încrucișați se obține tabloul complet al izoclinelor.

Izocromaticile. Al doilea fenomen de extincție se produce simultan cu primul și se deduce din a doua condiție de anulare a intensității luminoase

$$\sin \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0 \quad \text{deci pentru} \quad \delta = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{A9.6})$$

Datorită continuității stării de tensiuni din model, a doua condiție de extincție este îndeplinită într-o succesiune continuă de puncte, rezultând o serie de franje de interferență numite izocromatice.

Izocromaticile sunt locurile geometrice ale punctelor în care valoarea diferenței tensiunilor principale este constantă.

Din relația (A9.1) se obține $\delta = k\lambda = C(\sigma_1 - \sigma_2)h$ de unde rezultă

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k\sigma_0, \quad (\text{A9.7})$$

unde k este ordinul franjei (ordinul benzii) iar

$$\sigma_0 = \frac{\lambda}{Ch} \quad (\text{A9.8})$$

este tensiunea etalon (valoarea benzii).

Punctele în care $k=0$, deci $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, se numesc *puncte singulare* (izotrope), adică puncte de nedeterminare pentru direcțiile principale. Rezultă că aceste puncte sunt și centrele de rotire ale izoclinelor.

Numărul benzilor de interferență depinde de intensitatea solicitării, deci de diferența $(\sigma_1 - \sigma_2)$. Mărind încărcarea, liniile devin mai dese, deplasându-se de la marginea modelului spre punctele singulare.

La examinarea modelului în lumină albă, compusă din vibrații de diferite lungimi de undă, expresia intensității luminoase la ieșire din analizor este

$$I = k (\sin 2\alpha)^2 \sum_{\lambda=0,39}^{0,77} a_{\lambda}^2 \cdot \left(\sin \frac{\pi \delta_{\lambda}}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{A9.9})$$

Izoclinele și punctele singulare apar negre, ca locuri de extincție completă. Izocromaticile apar colorate în culorile inelelor lui Newton.

3. Polariscopul circular

Condițiile de extincție pentru izocline și izocromatici se produc simultan, fiind independente. Apare necesitatea separării lor, pentru înlăturarea confuziilor.

În studiile calitative se obțin doar izocline, folosind un material mai puțin sensibil din punct de vedere fotoelastic (cu valoare mare a benzii), de exemplu plexiglasul, astfel ca numărul de izocromatici să fie redus sau chiar nul.

În studiile cantitative se obțin numai izocromatici prin studierea modelului în lumină polarizată circular. În acest caz planul de polarizare al luminii variază continuu și rapid în jurul axei de pe direcția de propagare, deci izoclinele devin imperceptibile.

Polarizarea circulară se realizează cu o *lamă sfert de undă* - lamă birefringentă, așezată cu axele de birefringență la 45° față de planul de polarizare al polarizorului, producând o diferență de drum $\delta = \lambda/4$ (corespunzătoare unei diferențe de fază $\varphi = \pi/2$). Așezând și înaintea analizorului o lamă sfert de undă, cu axele de birefringență orientate la 45° față de planul său de polarizare (măsurat în același sens ca la polarizor), se transformă polarizarea circulară din nou într-o polarizare plană. Astfel, vibrația plană de la ieșirea din analizor este obținută prin

suprapunerea a două vibrații paralele, cu o diferență de fază ce rezultă numai din diferența de drum optic produsă de modelul birefringent.

4. Modul de lucru

4.1 Etalonarea materialului

La etalonare se determină valoarea benzii modelului σ_0 , adică variația diferenței tensiunilor principale între două izocromatice succesive. Se folosește o epruvetă tăiată din placa din care va fi executat modelul (σ_0 poate diferi de la o placă la alta) solicitată la încovoiere pură printr-un dispozitiv de încărcare cu pârghie (fig. A9.3)

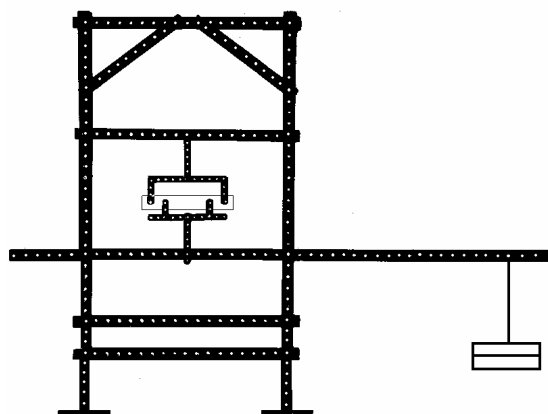


Fig. A9.3

La solicitarea de încovoiere pură, în secțiunile transversale și longitudinale $\tau=0$ deci tensiunile normale în aceste secțiuni sunt tensiuni principale. În plan vertical, pe porțiunea inferioară $\sigma_2=0$, deci $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 = M z / I_y$.

În porțiunea de încovoiere pură a epruvetei, izocromaticile apar ca franje rectilinii și paralele cu axa barei (fig. A9.4)

$$\sigma_0 = \sigma_{max} / k, \quad (A9.10)$$

unde

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_y} = \frac{(F/2)c}{h \ell^2 / 6} \quad (A9.11)$$

Pentru a evita erorile datorite efectului de margine, se elimină din determinare izocromaticile de la marginile modelului. Se trasează un reper pe epruvetă la o distanță Δz de axă. Se încarcă epruveta până ce o izocromatică se suprapune peste linia de reper. În punctele respective

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_x = \frac{M \Delta z}{I_y} = \frac{(F/2)c}{h \ell^3 / 12} \Delta z \quad (\text{A9.12})$$

Se determină ordinul k al izocromaticii, pornind de la izocromatica de ordinul zero ($k=0$) care coincide cu axa neutră (în lumină albă apare neagră). Rezultă $\sigma_o = \sigma_x / k$.

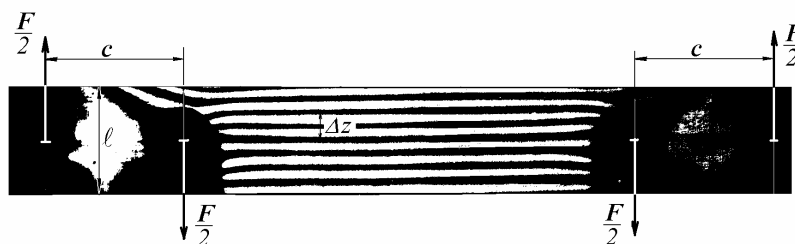


Fig. A9.4

Se repetă determinarea pentru o încărcare mai mare, deci se calculează σ_o pentru diferite valori k . Eroarea trebuie să fie sub 5%.

4.2 Confecționarea modelului piesei de studiat

Folosirea modelelor în fotoelasticitate este îndreptățită de faptul că starea plană de tensiune este, în majoritatea cazurilor, independentă de constantele elastice E și ν (teorema lui M. Lévy - 1898).

Modelele plane se pot confecționa din plăci de plexiglas - pentru studiul izoclinelor și din plăci de rășini sintetice (araldit, juralit, dinox, epoxi, etc.) - pentru obținerea izocromaticelor. Operațiile sunt trasarea, tăierea cu traforajul, pilirea până la dimensiunile finale. Ultima prelucrare a marginilor modelului se face chiar înaintea efectuării încercărilor, pentru evitarea falsificării rezultatelor de către *efectul de margine* (efect de îmbătrânire).

Dacă placa din care se va executa modelul prezintă câteva benzi datorită tensiunilor remanente apărute prin răcirea neuniformă a plăcii la turnare, ea trebuie supusă unui tratament de detensionare.

4.3 Fazele studiului unui model

După confecționare, modelul trebuie supus unei încărcări similare celei a piesei reale sau celor considerate în ipotezele de calcul, atât ca mod de acționare, cât și ca distribuție. Elementele obținute experimental sunt izoclinele și izocromaticile [24].

4.3.1 Izoclinele

Izoclinele se obțin prin studierea unui model din plexiglas în lumină polarizată plan.

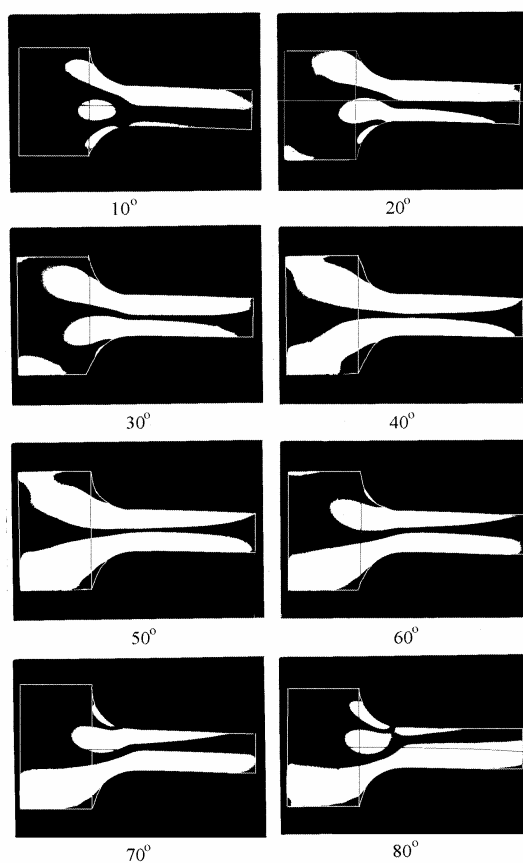


Fig. A9.5

Dacă se rotesc polarizii, păstrând perpendicularitatea celor două plane de polarizare, forma izoclinelor se schimbă. În figura A9.5 se prezintă câteva izocline pentru o bară în consolă încărcată cu o forță verticală la capătul din dreapta. Sub fiecare imagine s-a menționat parametrul izoclinei (unghiul α).

Apoi se suprapun pe aceeași figură izocline determinate pentru diferite unghiuri de rotire ale planelor de polarizare (fig. A9.6).

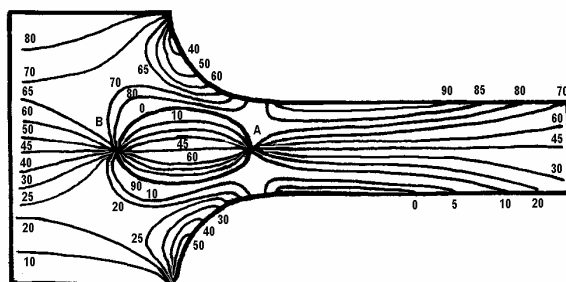


Fig. A9.6

Pe baza izoclinelor se pot construi *izostaticile*. Se trasează la intervale regulate, de-a lungul fiecărei izocline, o serie de linii scurte, paralele cu una din direcțiile principale corespunzătoare ei (fig. A9.7).

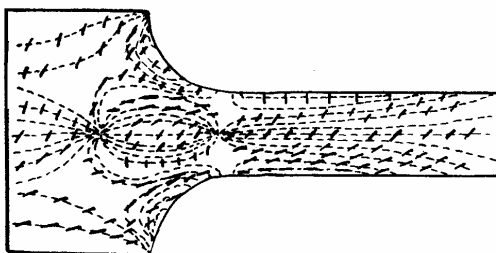


Fig. A9.7

Ducând apoi curbele continue, care să intersecteze fiecare izoclină pe direcția indicată de liniile scurte, se obțin izostaticile de o speță, la desimea dorită. Ortogonal față de primele, se trasează izostaticile de cealaltă speță (fig. A9.8).

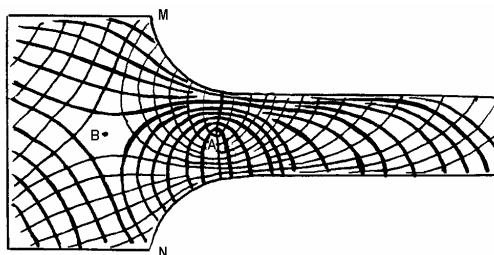
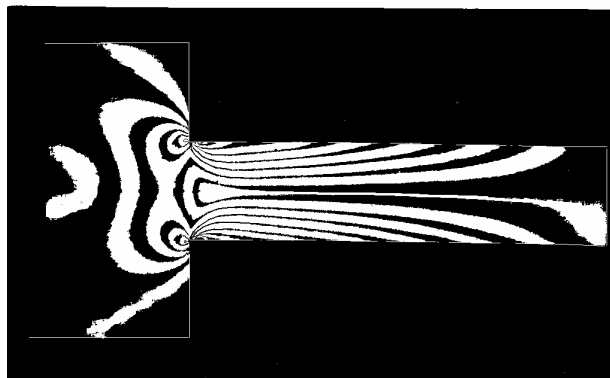
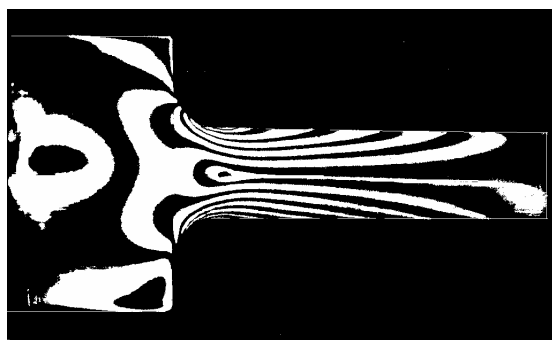


Fig. A9.8

Se remarcă punctele singulare *A* (atractiv) și *B* (repulsiv), situate pe axa barei, ca și punctele neutre *M* și *N* de pe contur, situate în vârful unghiurilor. Trasarea familiilor de izostatic se face pornind de la aceste puncte.

4.3.2 Izocromaticile

Izocromaticile se obțin pe un model, de exemplu de juralit, examinat în lumină polarizată circular (fig. A9.9).

*a**b*Fig. A9.9, *c*

Pornind de la punctele singulare ($k=0$) se notează pe fiecare curbă ordinul izocromaticii și cunoscând de la etalonare valoarea benzii modelului σ_o ,

în lungul fiecărei curbe se cunoaște valoarea tensiunii tangențiale maxime (sau a diferenței $\sigma_1 - \sigma_2$).

Modelul din figura A9.9, *a* are raza de racordare 1 mm, cel din figura A9.9, *b* are raza de racordare 10 mm iar cel din figura A9.9, *c* raza 20 mm.

Tabloul izocromaticelor este mai sugestiv decât cel al izoclinelor deoarece dă o idee asupra mărimii tensiunilor în diferite zone. Examinând succesiv concentrarea de tensiuni care apare în regiunea încastrării pentru consola cu diferite raze de racordare, se observă rărirea izocromaticelor și scăderea ordinului izocromaticelor (deci a solicitării) la marginea zonei de încastrare, pe măsura creșterii razei de racordare.

4.3.3 Diagrama de variație a tensiunilor pe contur

Pe o figură cu izocromatici se poate trasa diagrama de variație a tensiunilor pe contur.

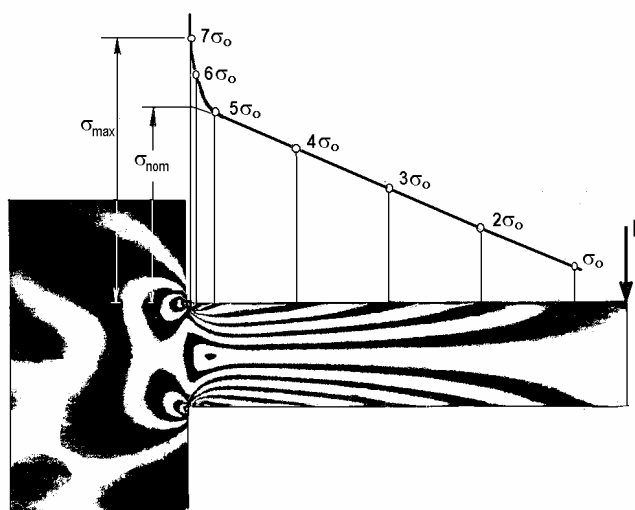


Fig. A9.10

În punctele de intersecție ale izocromaticelor cu conturul, deoarece tensiunea normală la contur este nulă, valoarea diferenței $\sigma_1 - \sigma_2$ reprezintă chiar valoarea tensiunii normale axiale din acel punct. Raportând valorile tensiunilor $k\sigma_0$ pe normale la contur, în punctele de intersecție ale izocromaticelor cu marginile modelului, unind printr-o curbă continuă extremitățile segmentelor astfel obținute, rezultă diagrama tensiunilor în lungul conturului (fig. A9.10).

Pe baza acestei diagrame se poate calcula *factorul de concentrare a tensiunilor* în zona saltului de secțiune

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}.$$

Valorile factorului K_t scad cu creșterea razei de racordare.

Fotoelasticitatea este astfel un auxiliar prețios în proiectarea rațională a pieselor de forme complicate.

Studiile mai complexe urmăresc determinarea separată a tensiunilor principale prin integrarea ecuațiilor de echilibru din teoria elasticității în lungul unei drepte aleasă arbitrar, prin integrare în lungul unei izostatice, combinând studiul izocronelor cu cel al izopachelor, utilizând extensometrul lateral Coker sau prin metoda Frocht [24].

4.4 Trecerea de la model la piesa reală

Tensiunea într-un punct al piesei metalice reale se calculează cu formula

$$\sigma = \sigma_m \frac{d_m}{d} \frac{h_m}{h} \frac{F}{F_m}, \quad (\text{A9.13})$$

în care d_m/d este raportul între dimensiunile liniare ale modelului și dimensiunile piesei (în planul acestora), h_m/h este raportul grosimilor modelului și piesei, F/F_m este raportul între sarcina aplicată piesei reale și cea aplicată modelului, iar σ_m este tensiunea într-un punct al modelului.

Bibliografie - Fluaj

(Bibliografia generală este prezentată în volumul I al cărții)

- Aliabadi, M. H., Allabade M. H. (eds), *Thermomechanical Fatigue and Fracture*, WIT Press/Computational Mechanics, 2002.
- Altenbach, H. and Skrzypek, J. J. (eds), *Creep and Damage in Materials and Structures*, CISM Courses and Lectures No.399, Springer, Wien, 1999.
- Constantinescu, A., Rotenstein, B. și Lașcu-Simion, N., *Fluajul metalelor*, Editura tehnică, București, 1970.
- Evans, R. W. and Wilshire, B., *Introduction to Creep*, The Institution of Metals, London, 1993.
- Finnie, I., Heller, W. R., *Creep of Engineering Materials*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- Frost, H. J. and Ashby, M. F., *Deformation-Mechanism Maps: The Plasticity and Creep of Metals and Ceramics*, Pergamon Press, 1982.
- Haasen, P., Gerold, V. and Kostorz, G. (eds), *Strength of Metals and Alloys*, Pergamon, Oxford, 1980.
- Hirth, J. P. and Lothe, J., *Theory of Dislocations*, 2nd ed, Krieger Publ. Comp., Malabar, FL, 1992.
- Kassner, M. and Pérez-Prado, M. T., *Fundamentals of Creep in Metals and Alloys*, Elsevier Science, Essex, 2004.
- Letofsky, E. and Cerjak, H., *Modeling of Microstructural Evolution in Creep Resistant Materials*, University Press, Cambridge, 1999.
- Miller, A. K., *Constitutive Equations for Creep and Plasticity*, Elsevier Applied Science, Essex, U.K., 1987.
- Milne, I., Ritchie, R. O. and Karahaloo, B. L. (eds), *Comprehensive Structural Integrity*, Elsevier, San Diego, 2003
- Mishra, R. S., Mukherjee, A. K. and Murty, K. L. (eds), *Creep Behaviour of Advanced Materials for the 21st Century*, TMS, Warrendale, PA, 1999.

- Parker, J. D. (ed), *Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures*, The Institute of Materials, London, 2001.
- Penny, R. K. and Marriott, D. L., *Design for Creep*, 2nd ed, McGraw-Hill, New York, 1995.
- Pomeroy, C. D. (ed), *Creep of Engineering Materials*, Mechanical Engineering Publ., London, 1978.
- Ritchie, R. O. (ed), *Creep and High Temperature Failure*, vol.5, Comprehensive Structural Integrity, Elsevier, San Diego, 2003.
- Saxena, A., *Nonlinear Fracture Mechanics for Engineers*, C.R.C. Press, Boca Raton, FL, 1998.
- Skrzypek, J. J. and Ganczarski, A., *Modeling of Material Damage and Failure of Structures*, Springer, Berlin, 1999.
- Skrzypek, J. J. and Hetnarski, R. B., *Plasticity and Creep: Theory, Examples and Problems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
- Strang, A., Cawley, J. and Greenwood, G. W. (eds), *Microstructural Stability of Creep Resistant Alloys for High Temperature Plant Applications*, Institute of Materials, London, 1998.
- Strang, A. and McLean, M. (eds), *Modelling of Microstructural Evolution in Creep Resistant Materials*, Institute of Materials, London, 1999.
- Strang, A. et al. (eds), *Advanced Materials for 21st Century Turbines and Power Plant*, Proc. 5th Int. Ch. Parsons Turbine Conf., Cambridge, July 2000.
- Viswanathan, R., *Damage Mechanisms and Life Assessment of High-Temperature Components*, A.S.M., Metals Park, Ohio, 1989.
- Warren, J. W., *A Survey of the Mechanics of Uniaxial Creep Deformation in Metals*, H.M.S.O., London, 1967.
- Wilshire, B. (ed), *Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Pineridge Press, Swansea, 1984.
- Wilshire, B. and Ewans, R. W. (eds), *Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures*, The Institute of Metals, London, 1990.

Index

- Acumularea deteriorărilor 244
 Articulația plastică 145
Bauschinger, efectul 218
 Bucla de histerezis 219
 Caracteristici mecanice ciclice 218
 Coeficientul efectiv de concentrare la
 oboseală 203, 240
 – de influență 5
 – – siguranță la durabilitate nelimitată
 206
 – – – la flambaj 76
 – – – la oboseală 206
 – – stare a suprafeței 205
 – – zveltete 74
 – dimensional 204
 – dinamic 163
 – ductilității la oboseală 228
 – rezistenței la oboseală 224, 227
 Cicluri de solicitări variabile 194
 Cilindri cu pereți groși 89
 – fretați 95
 Compresiunea excentrică 83
 Concentrarea tensiunilor 203, 238
 Corecția lui Morrow 202, 217, 236
 Criteriul Palmgren-Miner 244
 Curba de fluaj 266
 – lui Wöhler 196
 Deformația izotermă 266
 Deformații la încovoiere 15
 – – – și răsucire 17
 Deplasări virtuale 5
 Deteriorarea prin oboseală 190, 244
 Diagrama caracteristică ciclică 221
 – ciclurilor limită 199
 – durabilității 198
 – – constante 201
 – lui Haigh 199
 – mecanismelor de deformare 280
 Discul fretat pe arbore 111
 Discuri în rotație 89, 106
 Dreapta lui Goodman 202
 Ductilitatea la rupere la solicitări ciclice
 224
 Durabilitatea 198
 Durata de viață, estimarea 217, 247, 260
Ecrusarea ciclică 220
 – – , modulul 224
 – – , exponentul 224
 Ecuația Coffin-Manson 228
 – lui Arrhenius 270
 – lui Forman 256
 – pantelor universale 231
 – Paris-Erdogan 256
 Energia de activare 270
 – potențială de deformație 1
 – – totală 8
 Exponentul ductilității la oboseală 228
 – ecrușării ciclice 224
 – rezistenței la oboseală 227
**Factorul de concentrare a deformațiilor
 specifice** 238
 – – – – tensiunilor 238
 – – forfecare 18
 – – intensitate a tensiunii (FIT) 250
 – teoretic de concentrare a tensiunilor
 238
 Flambajul barelor drepte 63
 Flexibilitatea 5
 Fluajul 265
 – Coble 282
 – cu legea puterilor 282
 – Harper-Dorn 283
 – Nabarro-Herring 281
 – primar 268
 – prin alunecarea grăunților 283
 – – difuzie 281
 – – dislocații 282
 – secundar (stabilizat) 268
 – terțiar 268
 – tranzitoriu 292

- Formula lui Euler 71
 Formulele Tetmajer-Iașinki 75
 Forța critică de flambaj 70
 Fotoelasticitatea 299
 Fretajul 95
 Funcții admisibile 11
Hiperbola lui Euler 75
 – – Neuber 241
Impulsul dreptunghiular
 – triunghiular 178
 Instabilitatea elastică 63
 Integrala lui Duhamel 176
 Ipoteza lui Massing 223
 Inversiunea 227
 Izocline 302, 306
 Izocromatice 302, 308
 Încercări accelerate la fluaj 285
 Înclinarea normalei 128
 Încovoierea cilindrică 123
 – elasto-plastică 141
 Înmuierea ciclică 220
Legea Norton-Bailey 268
 Limita de fluaj 274
 – – oboseală 196, 257
 Lungimea critică de flambaj 82
 – de flambaj 71
Mecanismele fluajului 280
 Metoda celor patru puncte 231
 – eforturilor 35
 – Larson-Miller 286
 – lui Euler 68
 – Mohr-Maxwell 20
 – Rayleigh-Ritz 10
 – Serensen 209
 – Sherby-Dorn 290
 – Soderberg 207
 – stării limită 153
 – tolerării defectelor 193, 263
 – tensiune - durabilitate 192
 – deformație specifică - durabilitate 227
 Metode energetice 1
 Modurile de deformare a fisurii 251
 Modulul de ecruisare ciclică 224
 Multiplicatorul de impact 184
Oboseala metalelor 190
 – prin fretting 206
Parametrul *SWT* 202, 217, 237
 Placa circulară 124
 – subțire 117
 Polariscopul 299, 303
 Potențialul forțelor exterioare 8
 Pragul *FIT* 255
 Principiul lucrului mecanic virtual 5
 – minimului energiei potențiale totale 8
 Propagarea fisurii 249, 258
Răsucirea elasto-plastică 149
 – prin șoc 187
 Regula lui Neuber 240
 – – Simpson 29
 – – Vereșceaghin 23
 Relaxarea tensiunilor 277
 Rezistența la durabilitate limitată 198
 – reală la rupere la sollicitări ciclice 224
 Ruperea prin fluaj 275
Sarcina critică 67
 Schematizarea cu ecruisare 139
 – lui Prandtl 139
 – – Serensen 201, 209
 – – Soderberg 200, 207
 Sisteme static nedeterminate 35
 Sollicitări combinate 211
 – dinamice 163
 – elasto-plastice 139
 – prin forțe armonice 171
 – – – de inerție 164
 – prin șoc 175
Temperatura de tranziție 254
 Tenacitatea la rupere 253
 Tensiunea critică de flambaj 74
 – medie 235
 Tensiuni centrifugale 166
 – în palete 166
 – remanente 147, 151
 – termice 102, 114
 Teorema Crotti-Engesser 14
 – lui Castigliano 13, 15
 – – Menabrea 36
 – reciprocității deplasărilor 4
 – – lucrului mecanic 2
 Tubul cu presiune exterioară 94
 – – – interioară 93
Viteza de fluaj 266
 – – propagare a fisurii 255